

Ульяновский государственный технический университет  
Кафедра “Основы проектирования машин”

Курс лекций по теории механизмов и машин  
для машиностроительных специальностей

В. Я. Недоводеев

г. Ульяновск  
2012

## Оглавление

<b>Введение</b> .....	4
<b>1. Основные понятия и определения ТММ</b> .....	5
<b>2. Основные стадии проектирования и создания новой техники</b> .....	6
<b>3. Структурная классификация и виды механизмов</b> .....	7
3.1. Классификация кинематических пар.....	7
3.2. Кинематические цепи и их классификация.....	9
3.3. Понятие о степени подвижности механизма.....	10
3.4. Структурный анализ механизмов.....	11
3.5. Виды механизмов и их структурные схемы.....	13
<b>4. Кинематический анализ рычажных механизмов</b> .....	14
4.1. Построение планов положения механизма.....	14
4.2. Определение скоростей и ускорений механизма методом планов.....	15
4.3. Исследование рычажных механизмов методом кинематических диаграмм.....	17
4.4. Кинематическое исследование рычажных механизмов аналитическим методом.....	18
<b>5. Динамический анализ рычажных механизмов</b> .....	18
5.1. Классификация действующих сил.....	18
5.2. Приведение сил и масс в механизме.....	20
5.3. Уравнение движения машины.....	21
5.4. Понятие об уравновешивающей силе. Теорема Жуковского о жёстком рычаге.....	22
5.5. Графоаналитический метод решения уравнения движения машины.....	23
5.6. Неравномерное движение машин. Маховики.....	24
5.7. Подбор момента инерции $J_M$ маховика по заданному коэффициенту неравномерности $\delta$ .....	25
5.8. Регулирование непериодических колебаний скорости движения машин.....	26
5.9. Силовой расчёт рычажных механизмов.....	27
<b>6. Синтез рычажных механизмов</b> .....	30
6.1. Постановка задачи, виды и способы синтеза.....	30
6.2. Решение задач оптимального синтеза стержневых механизмов.....	30
6.3. Условия проворачиваемости кривошипа в шарнирном четырёхзвеннике.....	31
6.4. Учёт углов давления в стержневых механизмах.....	32
6.5. Синтез четырёхзвенника по трём заданным положениям шатуна.....	32
6.6. Синтез кривошипно-кулисного механизма по заданному коэффициенту изменения скорости хода.....	33
6.7. Синтез кривошипно-ползунного механизма по некоторым заданным размерам.....	33
6.8. Понятие о синтезе механизма по заданному закону движения выходного звена.....	34
6.9. Понятие о синтезе механизма по заданной траектории.....	35
6.10. Общий порядок проектирования рычажного механизма.....	35
<b>7. Кулачковые механизмы</b> .....	36
7.1. Классификация кулачковых механизмов.....	36
7.2. Кинематический анализ кулачковых механизмов.....	37
7.3. Некоторые вопросы динамического анализа кулачковых механизмов.....	39
7.4. Синтез кулачковых механизмов.....	40
7.4.1. Выбор закона движения толкателя.....	40

7.4.2. Профилирование кулачка.....	41
7.4.3. Динамический синтез кулачкового механизма.....	42
7.4.4. Аналитический способ синтеза кулачковых механизмов.....	44
7.4.5. Понятие о проектировании пространственных кулачковых механизмов...	45
7.4.6. Проектирование кулачковых механизмов с плоским (тарельчатым) толкателем...	45
<b>8. Фрикционные и зубчатые механизмы.....</b>	<b>46</b>
8.1. Общие сведения о передачах вращения.....	46
8.2. Фрикционные передачи.....	48
8.3. Зубчатые передачи. Виды и классификация.....	49
8.4. Основная теорема зацепления (теорема Виллиса).....	51
8.5. Эвольвента и её свойства.....	53
8.6. Геометрия эвольвентного зацепления.....	53
8.7. Качественные показатели зацепления.....	54
8.8. Основные параметры зубчатых колёс.....	55
8.9. Методы нарезания зубчатых колёс.....	56
8.10. Корректирование зубчатых колёс.....	57
8.11. Наименьшее число зубьев зубчатых колёс. Подрезание и заострение зубьев.....	58
8.12. Выбор расчётных коэффициентов смещения для передач внешнего зацепления.....	60
8.13. Цилиндрические колёса с косыми зубьями и их особенности.....	60
8.14. Конические зубчатые передачи.....	62
8.15. Червячные передачи.....	62
8.16. Кинематический анализ и классификация фрикционных и зубчатых механизмов...	63
8.16.1. Кинематический анализ эпициклических механизмов.....	66
8.16.2. Эпициклические механизмы с коническими колёсами.....	68
8.17. Некоторые вопросы синтеза зубчатых механизмов.....	68
8.17.1. Синтез эпициклических механизмов с цилиндрическими колёсами. Условия синтеза.....	69
8.17.2. Методы синтеза эпициклических механизмов.....	71
<b>9. Трение в кинематических парах.....</b>	<b>72</b>
9.1. Виды трения.....	72
9.2. Трение скольжения в поступательных парах.....	73
9.3. Трение скольжения во вращательных парах.....	74
9.4. Трение качения.....	74
9.5. Особенности учёта сил трения при силовом расчёте рычажных механизмов.....	75
9.6. Коэффициент полезного действия (кпд) машины.....	76
<b>10. Уравновешивание масс в механизмах и машинах.....</b>	<b>78</b>
10.1. Действие сил на фундамент. Условия уравновешивания.....	78
10.2. Уравновешивание с помощью противовесов на звеньях механизма.....	79
10.3. Уравновешивание вращающихся масс (роторов).....	80
<b>Список книг по дисциплине “Теория механизмов и машин”.....</b>	<b>83</b>

## Введение

Теория механизмов и машин (ТММ) является одним из разделов механики, в котором изучается строение, кинематика и динамика механизмов и машин в связи с их анализом и синтезом.

Прикладная механика, которая в настоящее время объединяет такие дисциплины, как: ТММ; сопротивление материалов; детали машин и подъемно-транспортные машины; является одной из старейших отраслей наук. Известно, например, что еще при строительстве египетских пирамид использовались простейшие механизмы (рычаги, блоки и т.д.). Наука, как таковая, выделилась около 200 лет тому назад. Существенный вклад в развитие практической механики внесли такие ученые и изобретатели, как: М.В. Ломоносов; И.И. Ползунов – создатель паровой машины; И.П. Кулибин – создатель часов автоматов; механизма протеза и др.; отец и сын Черепановы, построившие первый в России паровоз; Л. Эйлер, разработавший теорию плоского зацепления и предложивший эвольвентный профиль зубьев колес, который используется в настоящее время.

Внесли свой вклад в развитие науки академики: П.Л. Чебышев, И.А. Вышнеградский, Н.П. Петров, В.П. Горячкин, М.В. Остроградский; профессора: Н.Е. Жуковский – отец русской авиации, В.Л. Кирпичев, Н.И. Мерцалов, Л.А. Ассур, И.В. Мещерский, физик Д. Максвелл, а также современные ученые, такие как: И.И. Артоболевский, Н.Г. Бруевич, Д.Н. Решетов и др.

## 1. Основные понятия и определения ТММ

Ведущей отраслью современной техники является машиностроение, развитие которого неразрывно связано с созданием новых машин и механизмов, повышающих производительность труда и заменяющих ручной труд машинным.

В технике широко используются подвижные механические системы, подразделяемые на машины, машинные агрегаты и механизмы.

В обобщенном виде машина – это устройство, создаваемое человеком для использования законов природы с целью облегчения физического и умственного труда.

По функциональному назначению машины условно можно разделить на: энергетические, транспортные, технологические, контрольно-управляющие, логические (ЭВМ).

Устройства, включающие ряд машин и механизмов, называются машинными агрегатами (М.А.). Обычно М.А. состоит (рис.1) из двигателя – D, передаточного механизма – П.М., рабочей машины – Р.М. и, в ряде случаев, контрольно-управляющих устройств (системы автоматического регулирования) – САР.

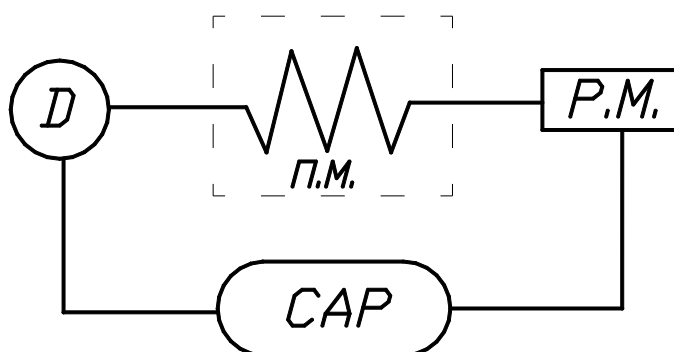


Рис.1 Схема машинного агрегата

В состав каждой отдельной машины входит один или несколько механизмов.

*Механизмом* называется система материальных тел, предназначенных для преобразования движения одного или нескольких тел в требуемые движения остальных.

*Состав механизмов* – разнообразен и включает механические, гидравлические, электрические и др. устройства.

Несмотря на разницу в назначении механизмов их строение, кинематика и динамика имеет много общего, поэтому исследование механизмов проводится на базе основных принципов современной механики.

Всякий механизм состоит из отдельных тел (деталей), соединенных между собой.

*Деталь* – это изделие, изготовленное без сборочных операций.

Детали, соединенные между собой неподвижно или с помощью упругих связей, образуют отдельное *звено*.

Выполнение звеньев из нескольких деталей обеспечивается их соединением. Различают соединения неразъемные (сварные, заклепочные, клеевые) и разъемные (шпоночные, шлицевые, резьбовые).

Звенья в зависимости от вида их материала могут быть твердые и гибкие (упругие).

Два звена, соединенных друг с другом подвижно, образуют *кинематическую пару*.

Неподвижное звено, состоящее из одной или нескольких деталей, называется *стойкой*.

Таким образом, каждый механизм имеет стойку и подвижные звенья, среди которых выделяют входные, выходные и промежуточные звенья.

*Входным (ведущим)* звеньям сообщается движение, преобразуемое механизмом в требуемые движения выходных (ведомых) звеньев с помощью промежуточных звеньев. Обычно в механизме имеется одно входное и выходное звено. Но в некоторых случаях имеют место механизмы с несколькими входными или выходными звеньями, например, дифференциал автомобиля.

Развитие техники осуществляется в направлении совершенствования ранее известных механизмов и путем создания принципиально новых их видов.

## **2. Основные стадии проектирования и создания новой техники**

При проектировании новой техники возникает необходимость проведения работ, связанных с анализом и синтезом новой конструкции.

*Анализ* осуществляется при заданных размерах и массе звеньев, когда необходимо определить: скорости, ускорения, действующие силы, напряжения в звеньях и их деформации. В результате может быть произведен проверочный расчет на прочность, выносливость и т.д.

Синтез осуществляется при заданных скоростях, ускорениях, действующих силах, напряжениях или деформациях. При этом требуется определить необходимые размеры звеньев, их форму и массу.

При синтезе часто решается задача оптимального проектирования конструкции, когда находятся необходимые показатели работы машины при наименьших затратах труда.

Обычно основными этапами создания новой конструкции являются:

- 1) Разработка принципиальной схемы;
- 2) Проектирование и расчет машины и отдельных ее узлов;
- 3) Экспериментальные исследования и доводка опытного образца.

Проектирование новой техники включает следующие основные этапы:

- а) разработка технического задания, включающего основные исходные данные;
- б) разработка эскизного проекта, включающего выбор схемы и компоновку основных узлов конструкции;
- в) разработка технического проекта, где осуществлены основные расчеты и представлены сборочный чертеж и др. документация.

При проектировании сложных механизмов обычно стремятся выделить из общей схемы отдельные, более простые типовые механизмы, проектирование которых имеет свои закономерности. К таким широко используемым в технике механизмам относятся: рычажные (стержневые), кулачковые, фрикционные, зубчатые и др., причем с точки зрения строения, кинематики и динамики любой механизм можно заменить условным рычажным механизмом с последующим его анализом, поэтому структура, кинематика и динамика рычажных механизмов рассматривается наиболее подробно.

### 3. Структурная классификация и виды механизмов

#### 3.1. Классификация кинематических пар

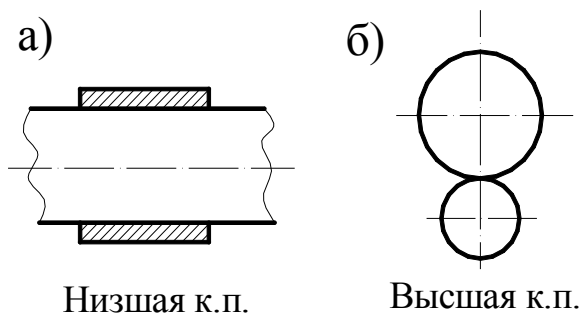


Рис.2

Подвижные соединения двух звеньев, называемые кинематической парой (к.п.), классифицируются по разным признакам, например, по характеру соприкосновения звеньев – на низшие, когда контакт происходит по поверхности, и высшие, когда контакт звеньев осуществляется по линии или в точке (рис.2, а, б).

Преимуществом низших к.п. является возможность передачи значительных усилий при малом износе, а достоинством высших к.п. возможность воспроизводить достаточно сложные относительные движения.

Низшие к.п. могут быть поступательными, вращательными, плоскими и пространственными, а также классифицироваться по числу условий связи, накладываемых на звенья при соединении их в к.п.

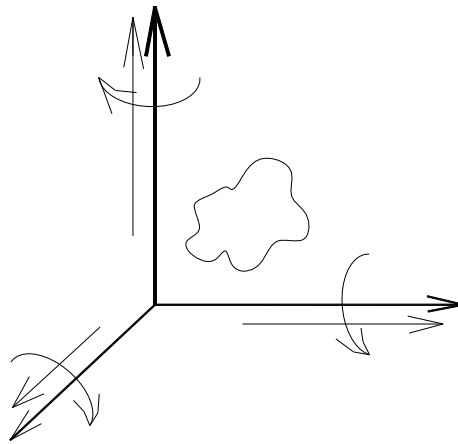


Рис.3

Любое тело в декартовой системе координат (рис.3) имеет 6 степеней свободы или подвижности ( $W=6$ ), часть из которых уничтожается в к.п., при этом класс к.п. определяется числом накладываемых связей ( $6-S$ ), где  $S$  – число относительных движений звеньев в к.п. Например, на рис. 4а-д приведены к.п. различных классов.

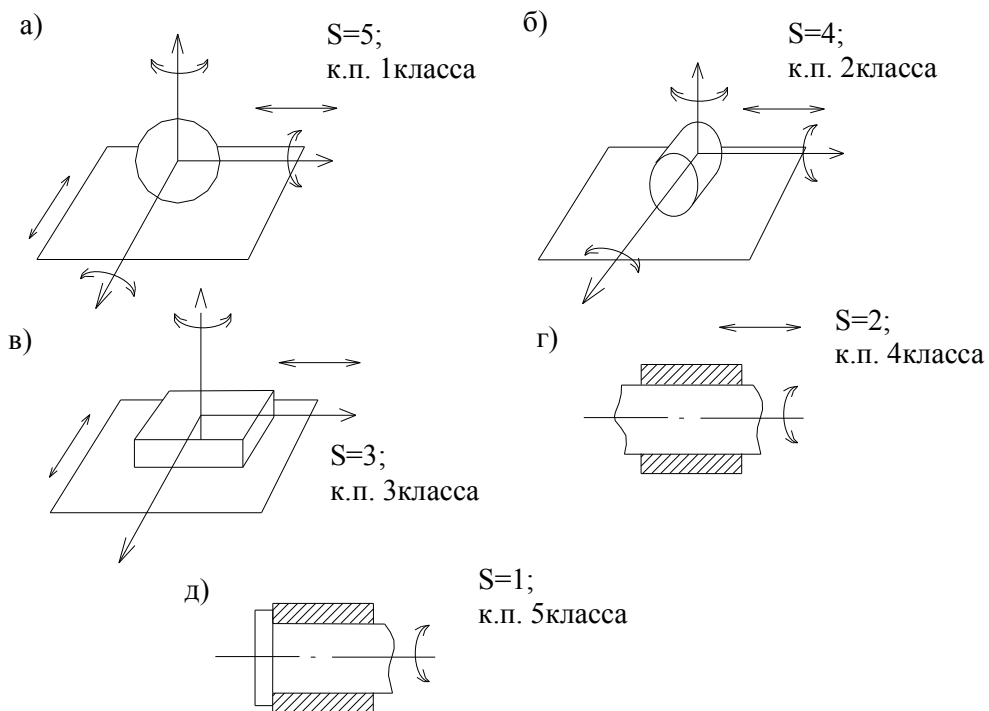
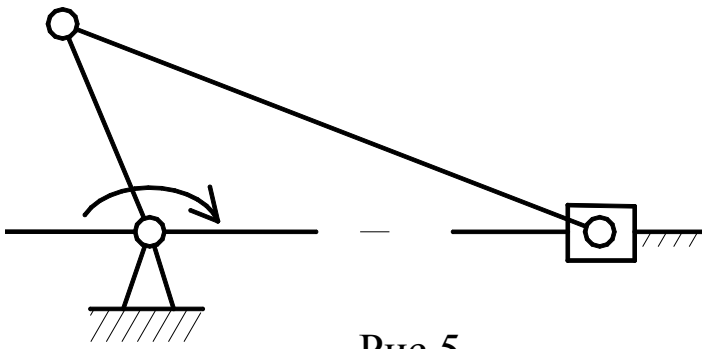


Рис.4





Кинематические пары и звенья механизмов изображаются упрощенно (рис.5) при соблюдении ГОСТа на обозначения звеньев и к.п.

Рис.5

### 3.2. Кинематические цепи и их классификация

Любой механизм представляет собой кинематическую цепь (к.ц.) звеньев, соединенных в кинематические пары (к.п.). К.ц. могут быть простыми и сложными, открытыми и замкнутыми, плоскими и пространственными.

В простой к.ц. каждое из ее звеньев входит в состав одной или двух к.п., а в сложной к.ц. имеются звенья, входящие в состав трех и более к.п.

В открытой к.ц. имеются звенья, входящие в состав одной к.п., а в замкнутой цепи каждое звено входит в состав 2-х и более к.п. (рис.6,а-в).

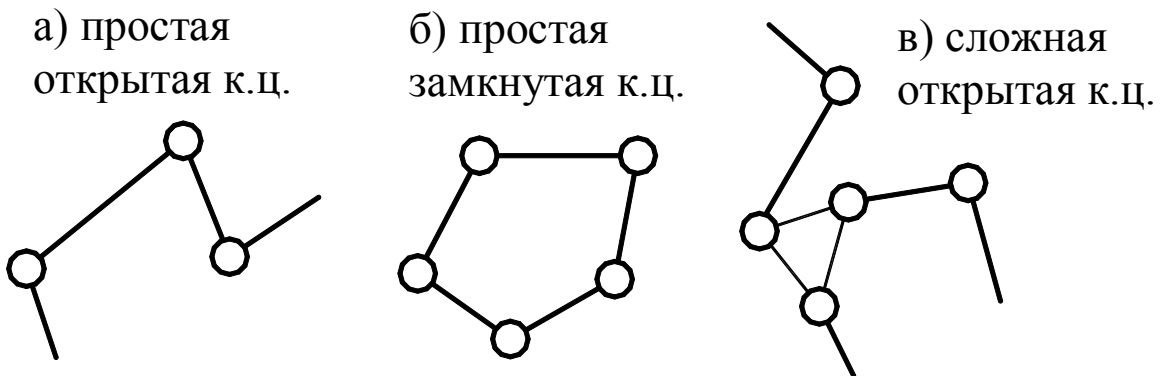


Рис.6

Если точки всех звеньев двигаются в одной или параллельных плоскостях, то к.ц. называется плоской, в противном случае к.ц. – пространственная (точки звеньев описывают плоские кривые в непараллельных плоскостях или пространственные кривые).

### 3.3. Понятие о степени подвижности механизма

Если в пространственной к. ц., состоящей из «n» подвижных звеньев, имеются к.п. 1-ого, 2-ого, ... 5-ого класса, число которых, соответственно,  $p_1, p_2, \dots, p_5$ , то к. ц. имеет число степеней свободы, определяемое формулой А.П. Малышева.

$$W=6n-5p_5-4p_4-3p_3-2p_2-p_1 \quad (3.1)$$

Так как любой механизм имеет одно неподвижное звено (стойку) и «n» подвижных звеньев, то формула (3.1) может использоваться для определения  $W$  пространственного механизма, где  $n$  – число подвижных звеньев, а  $W$  – степень подвижности механизма, показывающая сколько нужно иметь ведущих звеньев (двигателей) для получения определенного движения остальных его звеньев.

Для плоского механизма степень подвижности определяется по формуле Чебышева:

$$W=3n-2p_5-p_4, \quad (3.2)$$

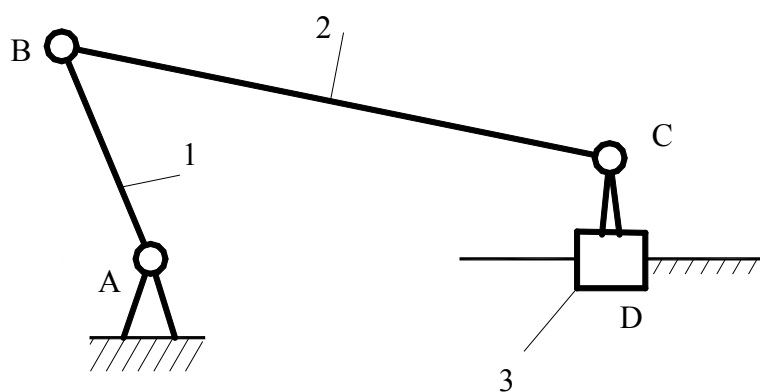


Рис.7

При этом к.п. 5-ого класса существует в виде поступательных, вращательных и винтовых.

Например, кривошипно-ползунный плоский механизм (рис.7), в котором  $n=3$ ;  $p_5=4$ ;  $p_4=0$ , имеет  $W=3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1$ .

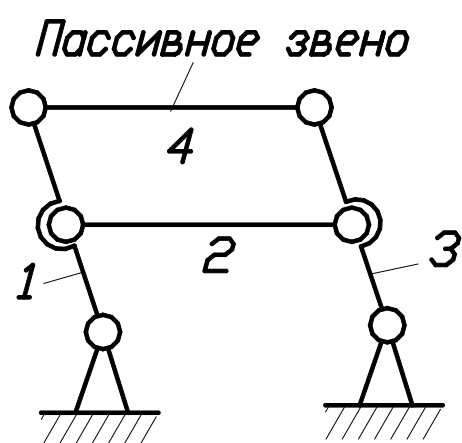


Рис. 8

При определении  $W$  необходимо учитывать возможность наличия так называемых «пассивных» звеньев, т.е. звеньев, устранимых без формального ущерба для кинематики анализируемого механизма (рис.8).

- а)  $W=3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 - 0 = 0$  – с пассивным звеном,
- б)  $W=3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1$  – фактически.

Кроме того, необходимо учитывать возможность наличия избыточных связей, которые не реализуются в реальном механизме,

а их число  $q$  определяется разностью между числом связей в к.п. действительно и формально возможного механизмов.

На рис. 9, а показан действительный механизм, а на рис. 9, б – формально возможный механизм, имеющий функциональное назначение, аналогичное дей-

ствительному механизму, но где все связи, в отличие от действительного механизма, реализованы.

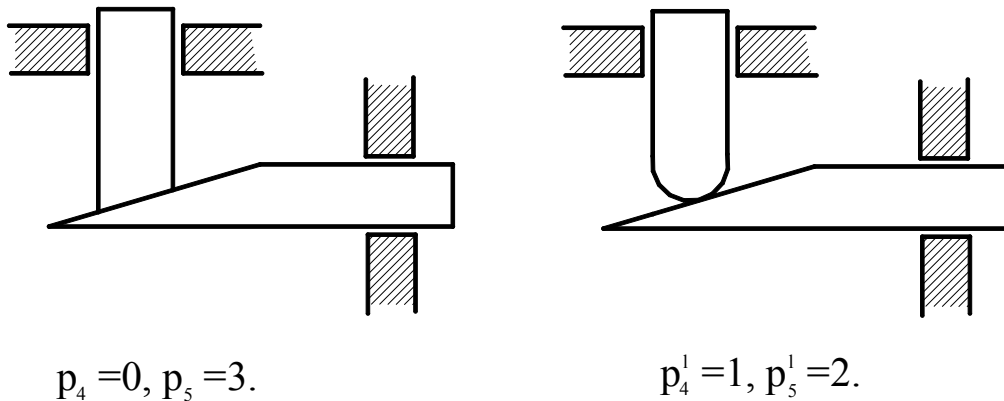


Рис.9

Число избыточных связей  $q$  в действительном механизме равно:

$$q = (2p_5 + p_4) - (2p_5^1 + p_4^1) = (2 \cdot 3 + 0) - (2 \cdot 2 + 1) = 1,$$

т.е. степень подвижности действительного механизма равна:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 + q = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 0 + 1 = 1.$$

В общем случае пространственного механизма:

$$W = 6n - \sum_i p_i + q, \quad (i \text{ от } 1 \text{ до } 5).$$

### 3.4. Структурный анализ механизмов

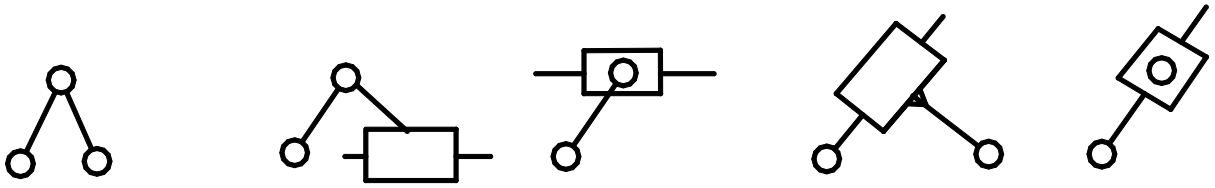
Основной принцип образования рычажных механизмов был сформулирован в 1914 году профессором Л. В. Ассуром и заключается в следующем.

Схема любого механизма может быть составлена последовательным присоединением к входным (начальным) звеньям и стойке к.ц. с нулевой степенью подвижности. Такие к. ц. называются структурными группами Ассура. Примеры различных групп Ассура показаны на рис.10.

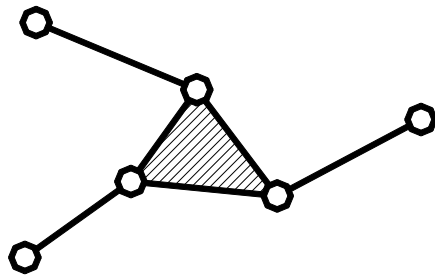
Начальное звено со стойкой образует простейший механизм 1-ого класса (рис.11).

Путем присоединения к таким механизмам различных групп Ассура можно получить механизм любой сложности.

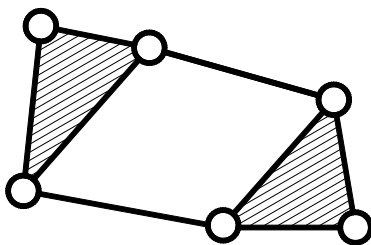
Группы Ассура классифицируются по числу к.п., которыми они присоединяются к основному механизму. Это число определяет порядок группы. Кроме того, группа Ассура имеет класс, определяемый числом к.п., образующих наиболее сложный замкнутый контур.



2-х поводковая группа Ассур 2-го класса 2-го порядка  
 $W=3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$

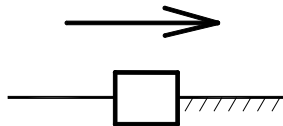
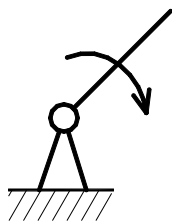


3-х поводковая группа Ассур  
 3-го класса, 3-го порядка  
 $W=3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 - 0 = 0$



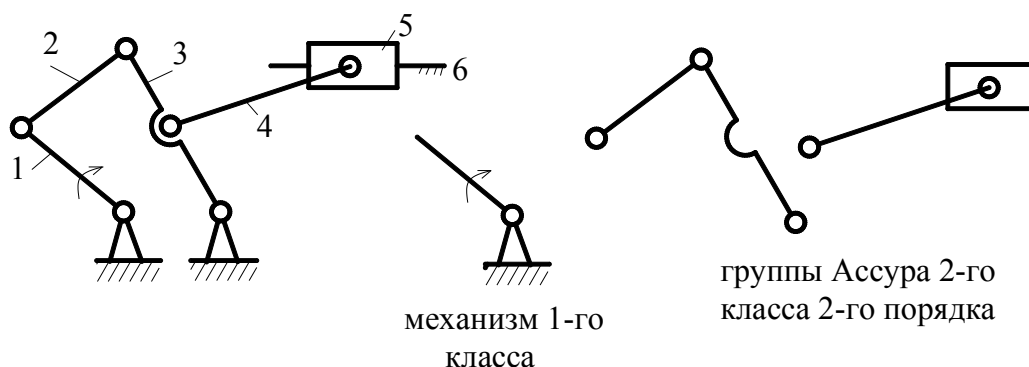
Группа Ассур 4-го класса  
 2-го порядка  
 $W=3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 - 0 = 0$

Рис.10



Простейшие механизмы  
 1-го класса

Рис. 11



Формула строения механизма  
 $1(1,6) \rightarrow 2(2,3) \rightarrow 2(4,5)$

Рис.12

Состав и последовательность присоединения групп Ассур в механизме можно выразить его формулой строения. Механизм в целом классифицируется по группе наивысшего класса. На рис.12 показан пример такой классификации.

### 3.5. Виды механизмов и их структурные схемы

Среди всего многообразия конструкций механизмов различают: стержневые (рычажные), кулачковые, фрикционные, зубчатые механизмы, механизмы с гибкими звеньями (например, ременные передачи) и др. виды.

Менее распространенные классификации подразумевают наличие механизмов с низшими или высшими парами в плоском или пространственном исполнении и т.д.

а) кривошипно-ползунный механизм    б) четырёхшарнирный механизм



в) кулисный механизм

г) синусный механизм

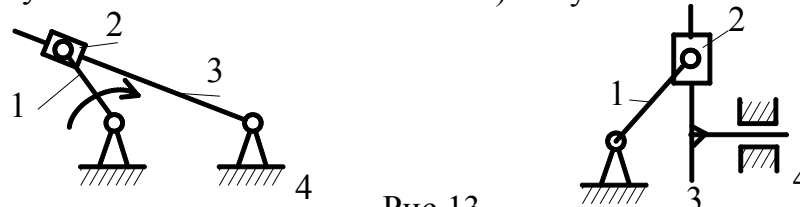


Рис.13

Учитывая возможность условного превращения практически любого механизма с высшими парами в рычажный, в дальнейшем наиболее подробно рассматривается именно эти механизмы, а структурные схемы других механизмов изложены в соответствующих разделах.

Среди рычажных механизмов наиболее распространены так называемые четырехзвенные, примеры которых представлены на рис.13, а-г.

В этих механизмах встречаются однотипные звенья: *кривошип* – звено, совершающее полнооборотное вращательное движение вокруг неподвижной оси; *коромысло* – звено, совершающее неполнооборотное вращательное движение вокруг неподвижной оси; *ползун* – звено, совершающее поступательное движение относительно стойки; *камень* – звено, совершающее поступательное движение относительно подвижной направляющей, называемой кулисой; *шатун* – звено, совершающее плоскопараллельное движение.

#### 4. Кинематический анализ рычажных механизмов

Кинематический анализ механизмов включает вопросы изучения звеньев с геометрической точки зрения, т.е. без учета действующих сил. Для этого используются графические, аналитические и экспериментальные методы исследования.

Одним из наглядных методов является графоаналитический, который включает:

а) построение планов положения механизма; б) определение скоростей и ускорений характерных точек или звеньев механизма.

При графических построениях на чертеже изображаются длины звеньев, скорости, ускорения и др. величины в определенном масштабе, характеризуемом масштабным коэффициентом:

$\mu = \text{значение параметра} / \text{длина отрезка}$ .

Например, вектор **ра** длиной 10 мм изображает скорость  $V=20$  м/с. Тогда  $\mu_v = 20/10 = 2 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1} / \text{мм}$ .

##### 4.1. Построение планов положения механизма

Графическое изображение взаимного расположения звеньев механизма, соответствующее заданному моменту времени, называется *планом положений* или *планом механизма*.

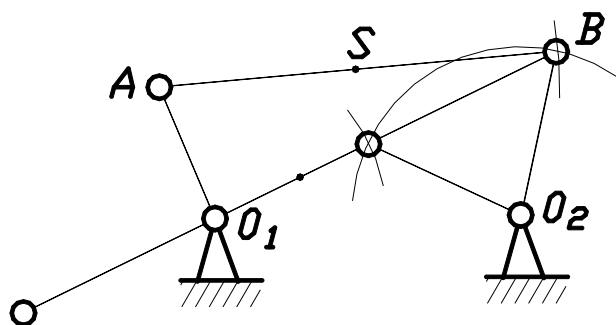


Рис. 14

Планы положения строятся в определенном масштабе методом засечек в соответствии с формулой строения механизма. При этом должны быть заданы линейные размеры всех звеньев (рис.14).

После построения нескольких совмещенных планов механизма при необходимости можно определить

графически траектории характерных точек звеньев, имеющих сложное движение, например, центра тяжести S шатуна АВ (рис.14).

## 4.2. Определение скоростей и ускорений механизма методом планов

Метод планов является одним из самых наглядных. Определению подлежат линейные скорости и ускорения отдельных точек и угловые скорости и ускорения звеньев. При этом предварительно составляются векторные уравнения для скоростей и ускорений точек звеньев, совершающих сложное движение, например:

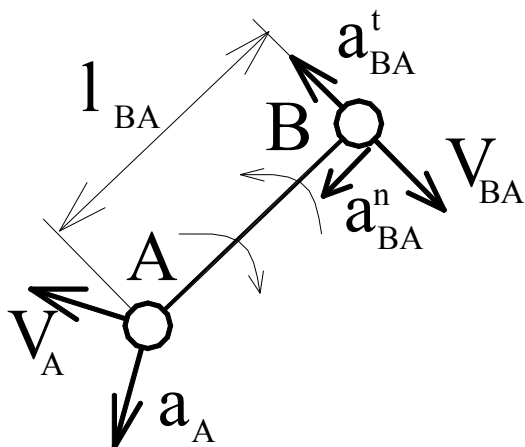


Рис.15

а) звено совершает плоскопараллельное движение, состоящее из переносного, т.е. поступательного со скоростью полюса и относительного вращательного вокруг полюса (рис.15).

Принимая за полюс т. А, получим:

$$\begin{aligned} \vec{V}_B &= \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}; & \text{где } V_{BA} &= \omega \cdot l_{AB}; \\ \vec{a}_B &= \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}; & \text{где } a_{BA} &= a_{BA}^n + a_{BA}^t \text{ при} \\ a_{BA}^n &= \omega^2 \cdot l_{AB}; & a_{BA}^t &= \varepsilon \cdot l_{AB}. \end{aligned}$$

Здесь  $V$ ,  $a$ ,  $\omega$ ,  $\varepsilon$  - линейные скорости и ускорения соответствующих характерных точек, а также угловые скорость и ускорение звена (индексы соответствуют характеру ускорений и обозначениям точек).

б) звено совершает сложное движение, состоящее из переносного вращательного и относительного поступательного, например, звено 1 (рис.16).

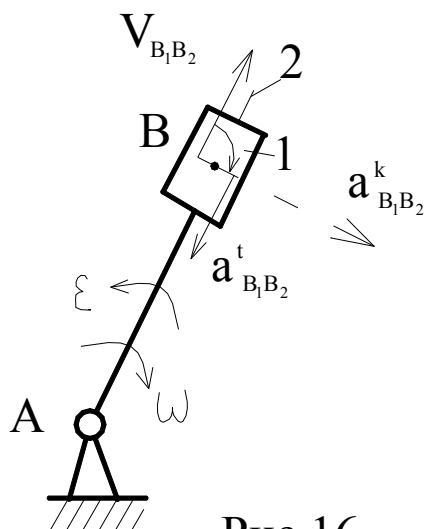


Рис.16

Пусть  $B_1$  и  $B_2$  - точки, принадлежащие звеньям 1 и 2. Тогда:

$$\begin{aligned} \vec{V}_{B1} &= \vec{V}_{B2} + \vec{V}_{B1B2}, & \text{где } V_{B2} &= \omega \cdot l_{AB}. \\ \vec{a}_{B1} &= \vec{a}_{B2} + \vec{a}_{B1B2}^t + \vec{a}_{B1B2}^k, & \text{где ускорение Кориолиса} \\ a_{B1B2}^k &= 2V_{B1B2} \cdot \omega & \text{и совпадает с направлением} \\ & & \text{вектора } V_{B1B2}, \text{ повернутого на } 90^\circ \text{ в сторону} \\ & & \text{переносного вращения.} \end{aligned}$$

Решение векторных уравнений осуществляется графически путем построения так называемых планов скоростей и ускорений, на которых абсолютные скорости и ускорения откладываются

от одной точки, называемой полюсом, в определенном масштабе.

Пример расчета кривошипно-ползунного механизма рассмотрен на рис.17, где план положений (рис.17, а), план скоростей и ускорений (рис.17, б, в).

Векторные уравнения для скоростей записываются в виде:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}; \quad \vec{V}_B = \vec{V}_{Bx} + \vec{V}_{BBx};$$

где  $V_A = \omega_1 \cdot l_{OA}$ ;  $V_{Bx} = 0$ ;  $V_{BA} \perp AB$ ;  $V_{BBx} \parallel X-X$ ,

т.е. в выбранном масштабе  $\mu_v$ :  $pb \parallel X-X$ ;  $ab \perp AB$

$V_{BA} = \mu_v \cdot ab$ ;  $V_B = \mu_v \cdot pb$  и  $\omega_2 = V_{BA} / l_{AB}$ .

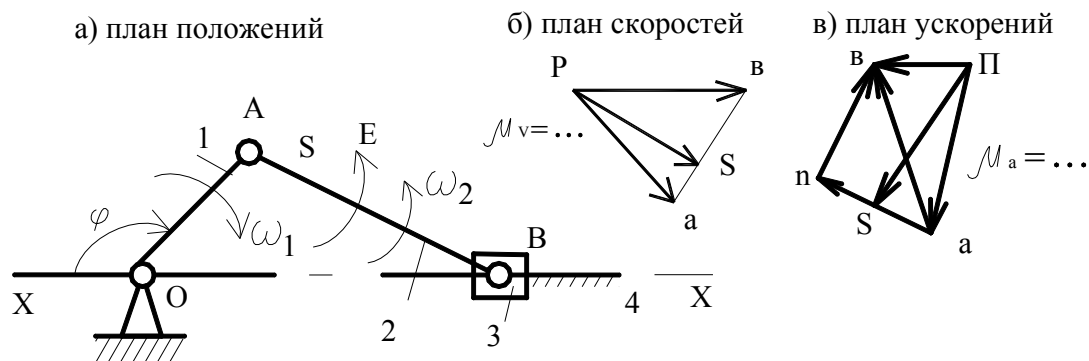


Рис.17

Векторные уравнения для ускорений при  $\omega_1 = \text{const}$  записываются в виде:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}; \quad \vec{a}_B = \vec{a}_{Bx} + \vec{a}_{BBx}^k + \vec{a}_{BBx}^t; \quad \text{где } a_A = a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_{OA}; \quad a_{BA} = a_{BA}^n + a_{BA}^t;$$

здесь  $a_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_{AB}$ ;  $a_{BA}^t = \varepsilon_2 \cdot l_{AB}$ ;  $a_{Bx} = 0$ ;  $a_{BBx}^k = 0$ ;  $a_{BBx}^t \parallel X-X$ .

Все ускорения представлены на рис.17 в выбранном масштабе  $\mu_a$  в виде соответствующих отрезков, например,  $a_B = \mu_a \cdot \pi b$  и т.д.

При определении скоростей и ускорений промежуточных точек звеньев, например т. S, можно использовать так называемую теорему подобия, согласно которой точки на плане положений звеньев и соответственные точки на планах скоростей и ускорений образуют подобные фигуры или пропорциональные от-

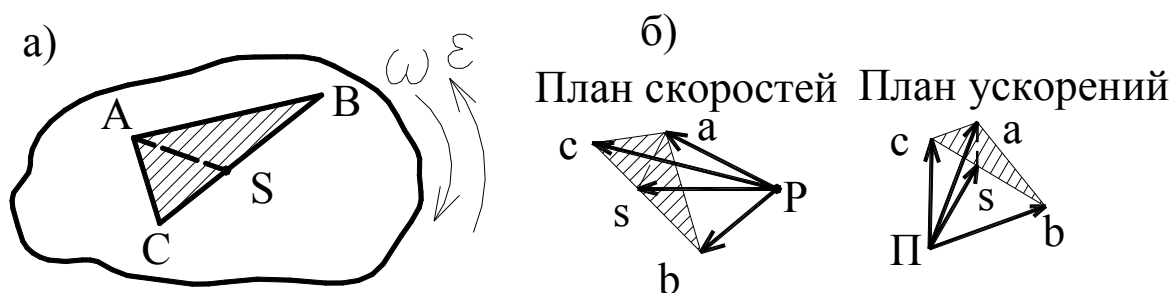


Рис.18

резки. Рассмотрим доказательство данной теоремы. На рис.18 показано звено ABC и планы скоростей и ускорений для точек этого звена:

отрезок са на плане скоростей соответствует  $V_{CA} \perp CA$ ;

отрезок аб на плане скоростей соответствует  $V_{AB} \perp AB$ ;

отрезок bc на плане скоростей соответствует  $V_{BC} \perp BC$ ;

т.е. треугольник **abc** подобен треугольнику **ABC**.



Ускорения относительного (вращательного) движения равны:

$$a_{CA} = l_{CA} \cdot \sqrt{(\omega^4 + \varepsilon^2)}; a_{AB} = l_{AB} \cdot \sqrt{(\omega^4 + \varepsilon^2)}; a_{BC} = l_{BC} \cdot \sqrt{(\omega^4 + \varepsilon^2)},$$

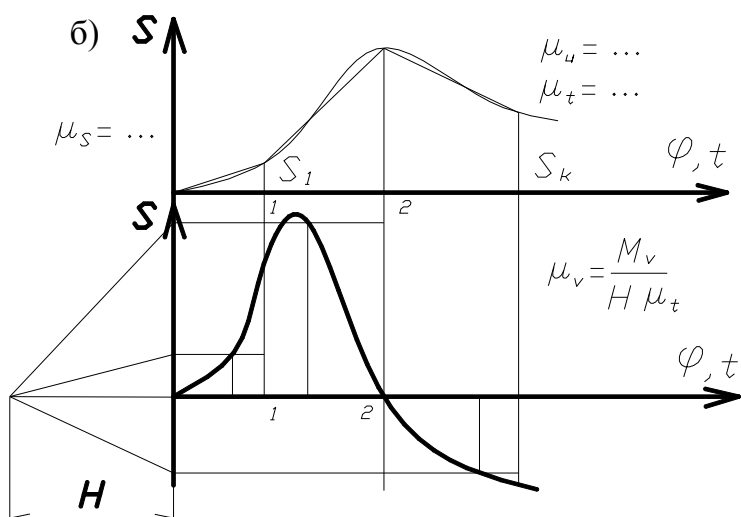
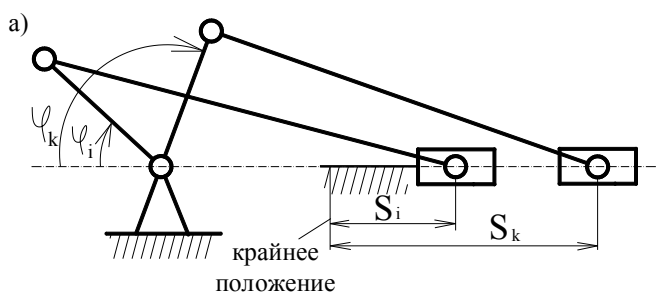
т.е.  $a_{CA}/l_{CA} = a_{AB}/l_{AB} = a_{BC}/l_{BC}$  или  $ca/CA = ab/AB = bc/BC$ ,

Следовательно, треугольник **abc** подобен треугольнику **ABC**. Аналогичным является построение фигур для любой промежуточной точки, например т. S (рис.18, а, б).

### 4.3. Исследование рычажных механизмов методом кинематических диаграмм

*Кинематической диаграммой* называется графическая зависимость какого-либо параметра движения звена от времени или от перемещения входного звена, представленные в определенной системе координат.

Если известна одна кинематическая диаграмма, то можно получить остальные зависимости путем графического дифференцирования или интегрирования.



На рис.19, а, б показана последовательность построения кинематической диаграммы перемещения ползуна кривошипно-ползунного механизма  $S(\varphi)$  и  $S(t)$ , а также элементы графического дифференцирования с получением диаграммы скоростей  $V(t)$  методом хорд.

Если диаграмма  $V(t)$  первична, то процесс, обратный интегрированию, обеспечит получение диаграммы  $S(t)$  и называется *графическим интегрированием*.

Следует отметить, что графические методы часто приводят к искажениям результатов из-за неточности графических построений, поэтому необходимо контролировать расположение характерных точек, соответствующих экстремумам на диаграммах.

Рис. 19

построений, поэтому необходимо контролировать расположение характерных точек, соответствующих экстремумам на диаграммах.

#### 4.4. Кинематическое исследование рычажных механизмов аналитическим методом

Аналитические методы исследования позволяют проводить анализ с заданной степенью точности. Кроме того, создание математических моделей механизмов позволяет решать задачи их оптимального синтеза при использовании ЭВМ.

Рассмотрим пример кинематического исследования синусного механизма (механизм двойного ползуна), где кривошип 1 вращается с угловой скоростью  $\omega$  и угловым ускорением  $\varepsilon$  (рис.20).

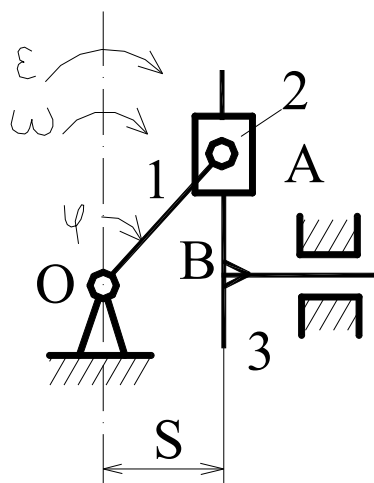


Рис.20

Тогда скорость и ускорение точки А равны:

$$V_A = l_{OA} \cdot \omega; \quad a_A = l_{OA} \cdot \sqrt{(\omega^4 + \varepsilon^2)}.$$

Все точки звена 1 и 2 описывают окружности, а точки звена 3 движутся поступательно, имея перемещения, скорости и ускорения равные:

$$S_B = l_{OA} \cdot \sin\varphi = l_{OA} \cdot \sin\omega t;$$

$$V_B = dS_B/dt = dS_B \cdot d\varphi/d\varphi \cdot dt = l_{OA} \cdot \omega \cdot \cos\varphi;$$

$$a_B = d^2S_B/dt^2 = l_{OA} \cdot (\varepsilon \cdot \cos\varphi - \omega^2 \cdot \sin\varphi)$$

$$\text{при } \varepsilon=0 \quad a_B = -l_{OA} \cdot \omega^2 \cdot \sin\varphi.$$

При исследовании многих механизмов получаются достаточно громоздкие формулы, что не является препятствием при использовании ЭВМ.

При исследовании пространственных механизмов используются элементы векторной алгебры и векторного анализа. Положения, скорости и ускорения точек механизма выражаются в векторной форме, при необходимости вычисляются проекции на оси и плоскости. Примеры таких исследований изложены в учебной литературе.

### 5. Динамический анализ рычажных механизмов

#### 5.1. Классификация действующих сил

Среди сил, действующих на механизм, различают:

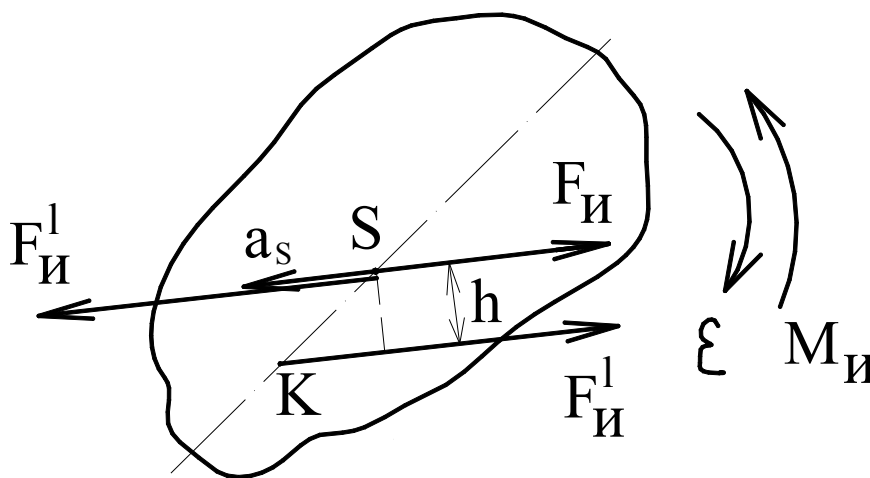
а) движущие силы  $F_d$  или моменты  $M_d$ , ускоряющие движение входных (начальных) звеньев и совершающие положительную работу. Например: силы давления газа на поршень в двигателе внутреннего сгорания, силы веса при опускании груза и т.д.

б) силы сопротивления  $F_c$  или моменты  $M_c$ , замедляющие движение входных звеньев и совершающие отрицательную работу. Они могут быть силами полезного сопротивления, дающими производственный эффект, и силами вредного сопротивления не дающими такого эффекта. К первому типу относятся например, силы тяжести при подъеме груза, а ко второму типу – силы трения.

в) силы реакции в кинематических парах  $F_{ij}$ , возникающие в опорах звеньев и являющиеся внутренними силами для механизма в целом и внешними для каждого отдельного звена.

г) силы инерции  $F_{и}$  или моменты сил инерции  $M_{и}$  возникают при переменном движении звеньев механизма и могут быть как движущими, так и силами сопротивления (в зависимости от их направления относительно направления движения звеньев). Фактически эти силы действуют на тело, вызывающее ускорение другого тела. Однако, условное приложения сил инерции к ускоряемому телу позволяет рассматривать его в равновесии. Этот принцип – принцип Даламбера позволяет задачу динамики свести к статическому расчету.

Силы инерции относятся к категории распределенных или так называемых массовых сил, которые как и другие аналогичные силы могут быть приведены к



главному вектору и главному моменту (рис.21).

$F_{и} = -ma_s$ ;  $M_{и} = -J_S \cdot \epsilon$ ;  
где  $m$  и  $J_S$  – масса и момент инерции звена относительно оси, проходящей через центр масс;

$a_s$  – ускорение центра масс;

$\epsilon$  – угловое ускорение звена.

Рис.21

Знаки (-) показывают, что направления  $F_{и}$  и  $M_{и}$  противоположны соответствующим ускорениям.

Сила  $F_{и}$  и момент  $M_{и}$ , могут быть заменены одной силой  $F_{и}' = F_{и}$ , линия действия которой проходит через так называемый центр качаний (точка К на рис.21) на оси звена и отстоит от линии действия  $F_{и}$  на расстоянии  $h = M_{и}/F_{и}$  при замене  $M_{и}$  парой сил  $F_{и}'$ .

## 5.2. Приведение сил и масс в механизме

Для исследования закона движения механизма его удобно заменить одним условным звеном – звеном приведения, имеющим закон движения аналогичного звена реального механизма.

Все внешние силы, действующие на звенья при этом заменяются одной приведенной силой  $F_{\Sigma}^{np}$  или моментом  $M_{\Sigma}^{np}$ , мощности  $P_{\Sigma}^{np}$  которых равны мощностям  $P_i$  заменяемых сил  $F_i$  и моментов сил  $M_i$ , т.е.

$$P_{\Sigma}^{np} = \sum P_i, \text{ где } P_i = F_i \cdot V_i \cdot \cos(F_i V_i) \text{ или } P_i = M_i \cdot \omega_i;$$

$$P_{\Sigma}^{np} = F_{\Sigma}^{np} \cdot V \cdot \cos(F_{\Sigma}^{np} V) \text{ или } P_{\Sigma}^{np} = M_{\Sigma}^{np} \cdot \omega.$$

Здесь  $V_i$  и  $V$  – скорости точек приложения соответствующих сил;  $\omega_i$  и  $\omega$  – угловые скорости  $i$ -го звена и звена приведения.

Суммарную приведенную силу или момент удобно записывать в виде составляющих, например:  $M_{\Sigma}^{np} = \sum M_{F_i}^{np} + \sum M_{M_i}^{np}$ , где каждая составляющая определяется из соответствующего равенства мощностей:

$$M_{F_i}^{np} = F_i \cdot V_i / \omega \cdot \cos(F_i V_i) - \text{ для силы } F_i;$$

$$M_{M_i}^{np} = M_i \cdot \omega_i / \omega - \text{ для момента } M_i;$$

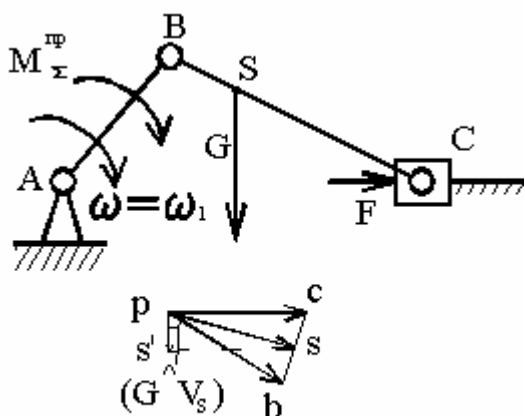


Рис.22

Пример кривошипно-ползунного механизма

$$(рис.22): \quad M_{\Sigma}^{np} = M_F^{np} + M_G^{np},$$

$$\text{где } M_F^{np} = F \cdot V_C / \omega_1 = F \cdot l_{AB} \cdot p_c / p_b;$$

$$M_G^{np} = G \cdot V_S / \omega_1 \cdot \cos(G \wedge V_S) = G \cdot l_{AB} \cdot p_s^{\perp} / p_b.$$

Здесь  $p_b$ ,  $p_c$ ,  $p_s^{\perp} = p_s \cdot \cos(G \wedge V_S)$  – вектора, взятые с плана скоростей (рис.22).

Как видно из формул, величина  $F^{np}$  ( $M^{np}$ ) зависит лишь от соотношения скоростей, а не от их абсолютной величины, что позволяет для приведения сил использовать планы скоростей без учета их масштабов. Каждое  $i$ -ое звено механизма обладает массой  $m_i$  и моментом инерции  $J_i$  относительно оси, проходящей через центр масс звена, при этом кинетическая энергия  $i$ -го звена плоского механизма равна:

$$T_i = (m_i \cdot V_i^2 / 2) + J_i \cdot \omega_i^2 / 2.$$

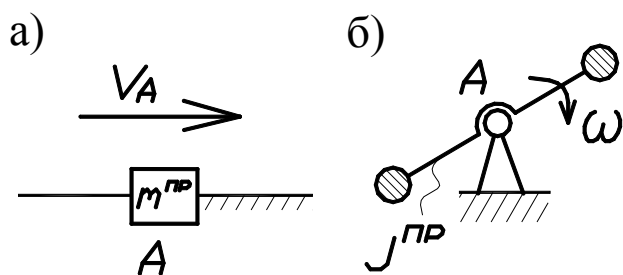


Рис.23

Массы и моменты инерции всех звеньев механизма можно условно заменить некоторой массой  $m^{np}$ , сосредоточенной в произвольно выбранной точке А звена приведения (рис.23, а) или некоторым моментом инерции  $J^{np}$ , приписанным звену приведения (рис.23, б).

Замена должна производиться из условия равенства кинетических энергий:

$$T^{pp} = T_{мех} = \sum T_i,$$

где  $T^{pp} = m^{pp} \cdot V_A^2 / 2$  или  $T^{pp} = J^{pp} \cdot \omega^2 / 2$ ,

т.е.  $m^{pp} = \sum [m_i \cdot (V_i / V_A)^2 + J_i \cdot (\omega_i / V_A)^2]$  – при поступательном движении звена привода.

$J^{pp} = \sum [m_i \cdot (V_i / \omega)^2 + J_i \cdot (\omega_i / \omega)^2]$  – при вращательном движении звена привода.

$m^{pp}$  и  $J^{pp}$  являются функциями положения звена привода, т.е. их величина может меняться при изменении положения звена в процессе его движения.

### 5.3. Уравнение движения машины

Работу машины можно разбить на 3 периода:

- 1) период пуска (разгон);
- 2) период установившегося движения;
- 3) период остановки (выбега);

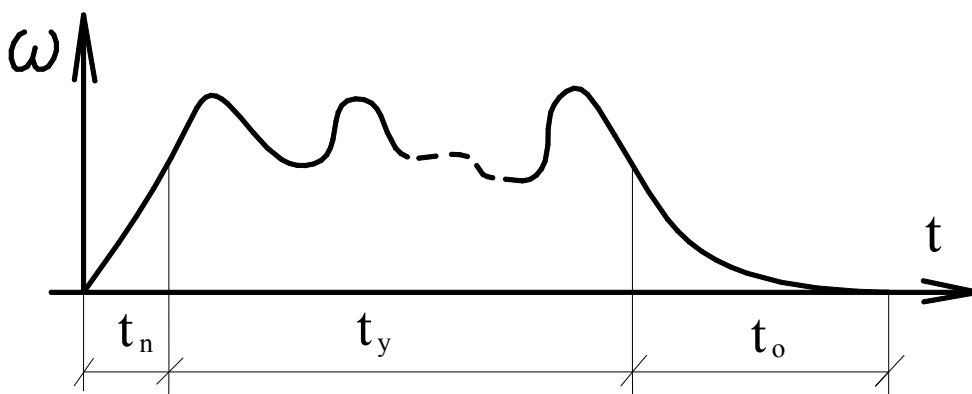


Рис.24

Аналитическая зависимость между действующими на звенья силами и кинематическими параметрами движения называется уравнением движения. Это уравнение в общем случае имеет вид  $\Delta T = A_d - A_c$ , где  $\Delta T = T - T_0$  – изменение кинетической энергии за рассматриваемый промежуток времени ( $T$  и  $T_0$  – величина кинетической энергии в конце и начале промежутка);

$A_d - A_c$  – суммарная работа действующих сил за рассматриваемый промежуток ( $A_d$ ,  $A_c$  – работа движущих сил и сил сопротивления).

В период пуска  $A_d - A_c = \Delta T > 0$ , т.е. происходит ускорение движения звеньев, являющегося неустановившемся.

В период установившегося движения  $A_d - A_c = \Delta T = 0$ , т.е. скорости звеньев в конечный и начальный моменты цикла равны и вся работа движущихся сил расходуется на преодоление сопротивлений.

В период остановки  $A_d - A_c = \Delta T < 0$ , движение продолжается некоторое время за счет накопленной кинетической энергии, поглощаемой за счет сопротивления движению.

Уравнение движения может быть выражено в интегральной и дифференциальной форме, а для упрощения его решения исследование машины заменяют исследованием звена приведения, в котором изменение кинетической энергии равно:  $\Delta T^{np} = A_d^{np} - A_c^{np}$ , где суммарная работа действующих на звено приведения сил может быть выражена:

а) в интегральной форме:

$$A_d^{np} - A_c^{np} = \int F_{\Sigma}^{np} ds \quad \text{или} \quad A_d^{np} - A_c^{np} = \int M_{\Sigma}^{np} d\varphi;$$

б) в дифференциальной форме:

$$dT^{np} = M_{\Sigma}^{np} d\varphi \quad \text{или} \quad M_{\Sigma}^{np} = dT^{np} / d\varphi;$$

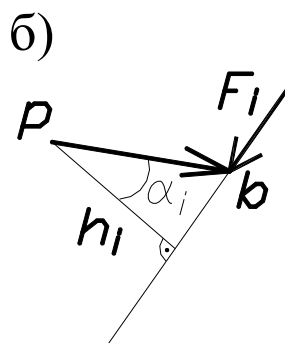
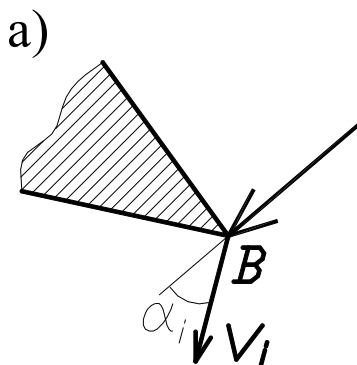
т.е. при  $dT^{np} = 1/2 \cdot J^{np} \cdot \omega^2$  получим:

$$M_{\Sigma}^{np} = (dJ^{np} / d\varphi) \cdot (\omega^2 / 2) + J^{np} \cdot \omega \cdot (d\omega / d\varphi) \cdot (dt / dt) = (dJ^{np} / d\varphi) \cdot (\omega^2 / 2) + \varepsilon \cdot J^{np}.$$

Таким образом, уравнение движения машины приводится к тому или иному конкретному виду и решается графическим и графоаналитическим методами, а учитываемые силы и моменты сил, а также приведенные массы и моменты инерции могут быть как постоянными так и переменными величинами, зависящими от того или иного фактора.

#### 5.4. Понятие об уравновешивающей силе. Теорема Жуковского о жестком рычаге

Одним из способов определения приведенной силы  $F^{np}$  является способ, предложенный проф. Н.Е. Жуковским. Уравнение, из которого может быть найдена  $F^{np}$ , основано на равенстве мощностей:  $F_{\Sigma}^{np} \cdot V_A \cdot \cos(F_{\Sigma}^{np} V_A) = \sum F_i \cdot V_i \cdot \cos(F_i V_i)$ .



Рассмотрим какое-либо звено механизма, в т. В которого приложена сила  $F_i$  под углом  $\alpha_i$  к вектору скорости  $V_i$  этой точки (рис.25, а).

Мощность силы  $F_i$  равна:

$$P_i = F_i \cdot V_i \cdot \cos \alpha_i.$$

Если вектор скорости т. В

(план скоростей) повернуть на

Рис. 25

$90^\circ$  и силу  $F_i$  приложить к концу

вектора (в т. «б»), сохранив ее направление, то момент этой силы относительно

полюса «р» будет равен (рис.25, б):  $M_i = F_i \cdot h_i = F_i \cdot V_i \cdot \cos \alpha_i = P_i,$

т.е. равен мощности силы  $F_i$ . Таким образом,  $F_i$  можно найти, повернув на  $90^\circ$  план скоростей и приложив к нему все внешние силы, включая силы инерции, в соответствующих точках и сохраняя их направления. Тогда из уравнения моментов такого рычага:

$F_{\Sigma}^{np} \cdot h_{np} = \sum F_i \cdot h_i$ , получим:  $F_{\Sigma}^{np} = \sum F_i \cdot h_i / h_{np}$ , где  $h_i$  и  $h_{np}$  – кратчайшие расстояния от полюса плана скоростей до линии действия  $i$ -ой и приведенной сил.

Повернутый на  $90^\circ$  план скоростей с приложенными к нему силами называется жестким рычагом Жуковского.

Величина  $F^{np}$  или  $M^{np}$  зависит от положения механизма, поэтому можно построить диаграмму, например,  $F^{np}(\varphi)$ , являющуюся функцией положения звена приведения. Для этого необходимо последовательно определить значения  $F^{np}$  методом рычага Жуковского для целого ряда положений механизма в пределах цикла ( $F_1^{np}, F_2^{np}, \dots$ ) и отложить их на диаграмме (рис.26).

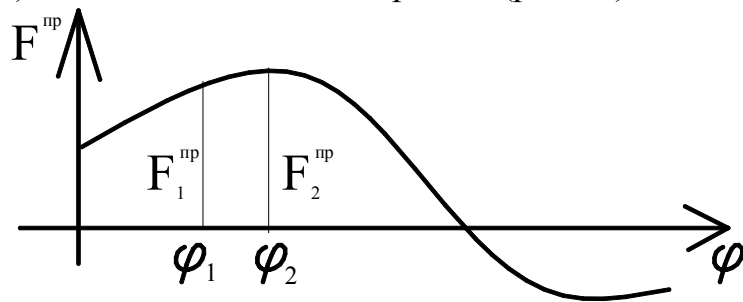


Рис.26

Приведенная сила  $F_{\Sigma}^{np}$  или момент  $M_{\Sigma}^{np}$  характеризует реакцию механизма на движение его входного звена по определенному закону, задаваемому двигателем. Сила или момент, равные по величине приведенной силе или моменту, но противоположные им по направлению называется уравновешенной силой  $F_{ур}$  или моментом  $M_{ур}$ . Эта сила или момент развивается двигателем и обеспечивает заданное движение входного звена.

Если к рычагу Жуковского приложить все внешние силы, включая силы инерции, а также  $F_{ур}$ , то его можно рассматривать в равновесии, из условия которого:  $F_{ур} \cdot h_{ур} + \sum F_i \cdot h_i = 0$  можно определить неизвестную  $F_{ур}$ , а также найти мощность двигателя  $P_{дв}$ , требуемую для получения заданного движения входного звена в заданном положении:

$$P_{дв} = F_{ур} \cdot V_A \cdot \cos(F_{ур} V_A) = M_{ур} \cdot \omega.$$

## 5.5. Графоаналитический метод решения уравнения движения машины

Данный метод позволяет не только наглядно иллюстрировать связь между динамическими и кинематическими параметрами движения, но и решать практические задачи синтеза, например, задачу уменьшения неравномерности вращения звеньев.

В качестве примера рассмотрим построение так называемой диаграммы энергомасс. Эта диаграмма строится на основе графиков:

$$\Delta T^{np}(\varphi) = T^{np}(\varphi) - T_0^{np}(\varphi) \text{ и } J^{np}(\varphi),$$

причем график  $\Delta T^{np}(\varphi)$  может быть получен путем графического интегрирования графика  $M^{np}(\varphi)$ .

На рис.27 показана последовательность построения диаграммы энергомасс в координатах  $\Delta T^{np}(J^{np})$ , которая при установившемся движении является замкнутой кривой и строится на базе диаграмм  $\Delta T^{np}(\varphi)$  и  $J^{np}(\varphi)$  путем исключения параметра  $\varphi$  ( $\varphi$  – угол поворота звена привода).

Если известна угловая скорость вращения  $\omega_0$  звена привода в начале цикла, то можно определить начальную кинетическую энергию:  $T_0^{np} = 1/2 \cdot J_0^{np} \cdot \omega_0^2$ .

Тогда диаграмму энергомасс можно рассматривать в координатах  $T^{np}(J_1^{np})$ , где ось  $J_1^{np}$  отстоит от первоначальной оси  $J^{np}$  на величину  $T_0^{np}$  (рис.27).

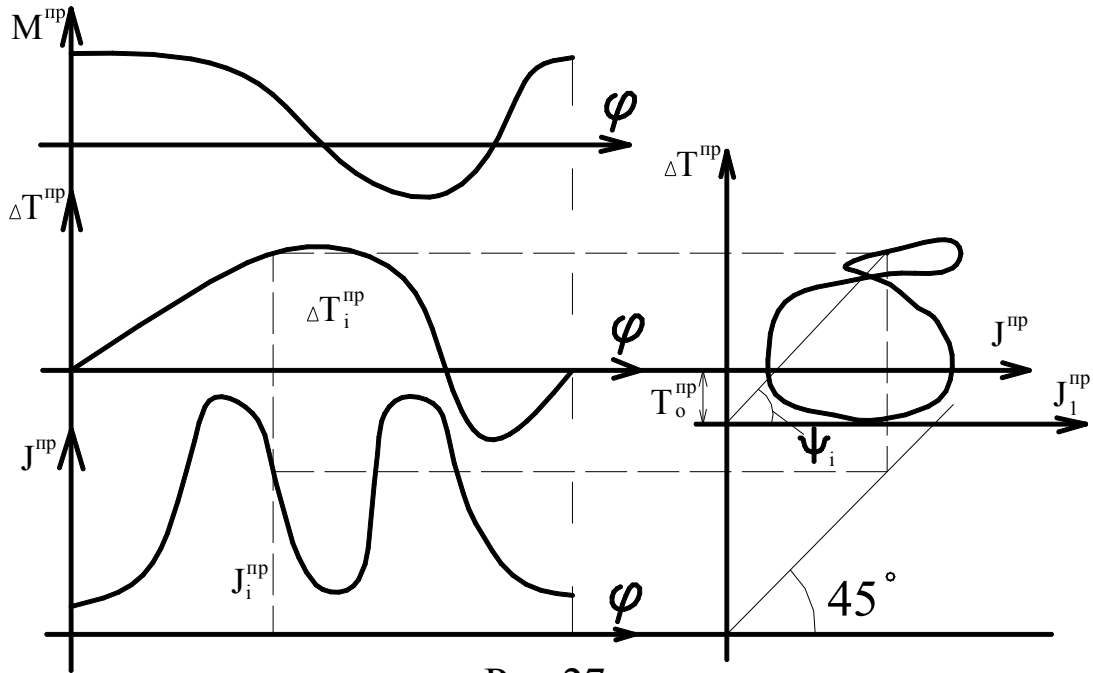
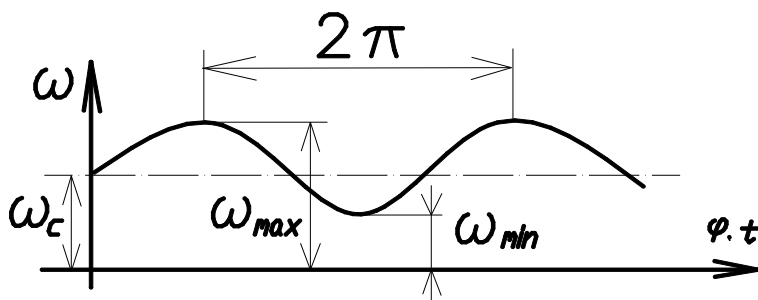


Рис.27

Так как  $T^{np} = 1/2 \cdot J^{np} \cdot \omega^2$ , то  $\omega^2 = 2 \cdot T^{np} / J^{np} = 2 \cdot \mu_T / \mu_J \cdot \text{tg} \Psi$ , где  $\mu_T$  и  $\mu_J$  – масштабные коэффициенты, используемые для построения диаграмм. Таким образом, диаграмма энергомасс позволяет при установившемся движении определить угловую скорость  $\omega$  звена привода в любой момент времени, т.е.

$$\omega = \sqrt{2 \cdot \mu_T / \mu_J \cdot \text{tg} \Psi}; \quad \text{а} \quad \text{tg} \Psi = \mu_J / \mu_T \cdot \omega^2 / 2.$$

### 5.6. Неравномерное движение машин. Маховики



Одним из режимов движения машины при совершении полезной работы является режим равномерного или установившегося движения.

При равномерном движении угловая скорость  $\omega$  вала двигателя постоянна, а при установившемся движении она



Рис. 28

периодически изменяется (рис.28),

причём степень неравномерности можно оценить коэффициентом неравномерности:

$$\delta = (\omega_{\max} - \omega_{\min}) / \omega_c,$$

где  $\omega_c$  – средняя угловая скорость за цикл  $\omega_c = (\omega_{\max} + \omega_{\min}) / 2$ .

Неравномерность вредно сказывается на работе машин, т.к. вызывает дополнительные инерционные нагрузки, которые могут привести к поломке.

Практикой установлены значения  $\delta$ , которые допустимы в различных условиях эксплуатации. Регулировать величину  $\delta$  можно путем изменения величины момента инерции звена привода, т.е. на быстро вращающийся вал закрепляется дополнительная масса, называемая маховиком.

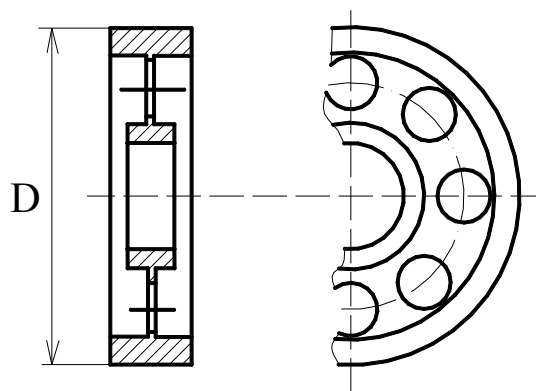


Рис. 29

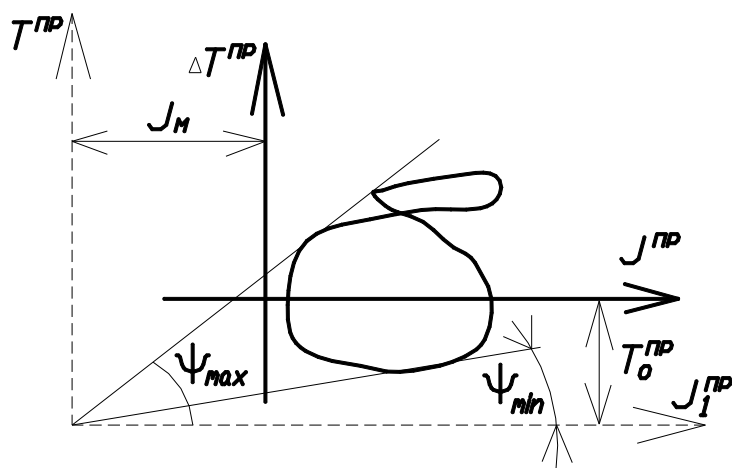
При конструировании маховика стремятся к получению необходимого момента инерции маховика  $J_M$  с наименьшим весом  $G$  и заданным диаметром  $D$ . Для этой цели маховик изготавливается в виде тяжелого обода, соединенного со втулкой тонким диском с отверстием или спицами (рис.29). Приближенно  $J_M$  можно определить по формуле:

$$J_M \approx G \cdot D^2 / 40, \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2.$$

### 5.7. Подбор момента инерции $J_M$ маховика по заданному коэффициенту неравномерности $\delta$

Обычно требуется определить параметры маховика при заданных значениях  $\omega_{\text{ср}}$  и  $\delta$ . Существует два наиболее распространенных метода определения  $J_M$  – Н.И. Мерцалова и метод Ф. Виттенбауэра. Рассмотрим более точный метод Ф. Виттенбауэра, при котором предварительно строится диаграмма энергомасс  $\Delta T^{\text{пр}}(J^{\text{пр}})$ .

Согласно этой диаграмме (рис.30):



$$\omega_{\max, \min}^2 = 2 \cdot \mu_T / \mu_J \cdot \text{tg} \Psi_{\max, \min},$$

$$\text{tg} \Psi_{\max, \min} = \mu_J / \mu_T \cdot \omega_{\max, \min}^2 / 2.$$

С другой стороны из уравнений п.5.6.:

$$\omega_{\max, \min} = \omega_c \cdot (1 + (-)\delta / 2).$$

Таким образом, найдя  $\Psi_{\max}$  и  $\Psi_{\min}$  и проведя касательные к диаграмме энергомасс под этими углами к горизонтали (рис.30), получим в точке их пересечения начало новой системы координат

старых осей на искомую величину  $J_M$  и  $T_0^{np}$ .

В целом последовательность определения  $J_M$  включает следующие операции:

1. Строится диаграмма  $M^{np}(\varphi)$  для установившегося движения.
2. Строится диаграмма  $\Delta T^{np}(\varphi)$  путем графического интегрирования диаграммы  $M^{np}(\varphi)$ .
3. Строится график  $J^{np}(\varphi)$  и диаграмма энергомасс путем исключения параметра  $\varphi$  из графиков  $\Delta T^{np}(\varphi)$  и  $J^{np}(\varphi)$ .
4. Определяются углы  $\Psi_{max}$  и  $\Psi_{min}$ , после чего находится  $J_M$  в новых координатах  $T^{np}$  и  $J_1^{np}$  диаграммы  $T^{np}(J_1^{np})$ .

### 5.8. Регулирование непериодических колебаний скорости движения машин

В процессе выполнения работы приходится регулировать скорость рабочего органа машины. Например, в стационарных двигателях необходимо поддерживать скорость рабочего органа постоянной, а в двигателях транспортных машин эта скорость должна изменяться в широких пределах.

Из уравнения движения машины следует, что изменения скорости рабочего органа можно достигнуть за счет изменения разности работ движущих сил и сил сопротивления ( $A_d - A_c$ ). Устройства, обеспечивающие изменения работы сил сопротивления применяются в виде тормозов, например, в транспортных машинах, которые снабжаются также и приспособлениями для одновременного разобщения двигателя с машиной – орудием.

Другим способом регулирования является изменение работы движущих сил путем воздействия на орган, подающий энергию к входному звену (поршню у двигателя внутреннего сгорания, лопаткам турбины и т.д.).

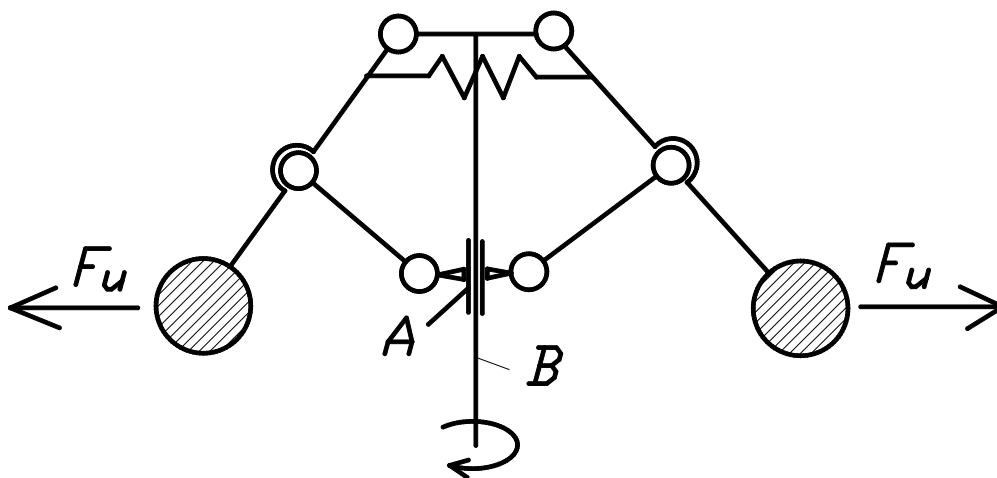


Рис. 31

Регулирование может осуществляться либо человеком-оператором, либо автоматически – с помощью устройств, называемых регуляторами.

Одним из них является центробежный регулятор (рис.31), приводимый во вращение валом двигателя В. Ползун А соединяется с органом, подводящим рабочее тело (пар, горючая смесь и т.д.). Регулятор автоматически поддерживает скорость вала двигателя постоянной, т.к. ее увеличение приводит к уменьшению подачи рабочего тела и наоборот.

### 5.9. Силовой расчет рычажных механизмов

Зная активные силы, действующие на звенья механизма и силы инерции этих звеньев, можно произвести его кинетостатический расчет, т.е. определить реакции в кинематических парах и уравновешивающую силу (момент) на входном звене, причем эта сила (момент) является движущей при совпадении ее направления с направлением движения входного звена или силой (моментом) сопротивления, если ее направление противоположно этому движению.

При кинетостатическом расчете реакции в кинематических парах определяются путем статического расчета, который базируется на результатах кинематического анализа, включая ускорения, необходимые для определения сил (моментов) инерции.

При силовом расчете используется принцип Даламбера, позволяющий решение задачи динамики свести к статическому расчету. Согласно этому принципу приведение ускоренно движущейся системы в равновесие обеспечивается условным приложением к этой системе сил инерции. При этом неизвестные силы определяются из уравнений статики.

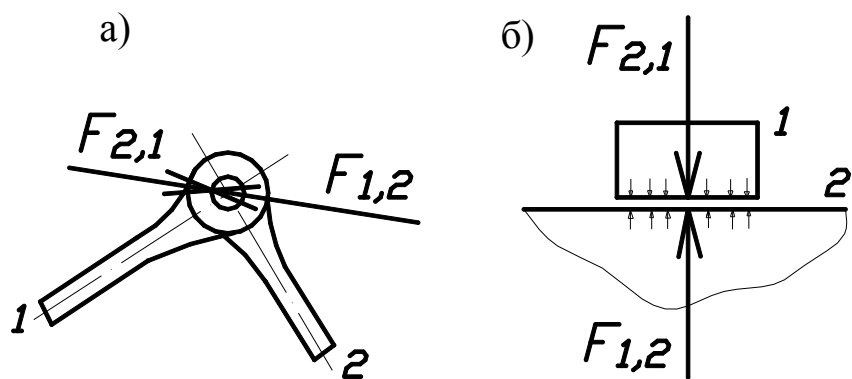


рис. 32

Силы взаимодействия между звеньями (реакции) можно считать направленными по нормали к контактирующим поверхностям, если расчет ведется без учета сил трения (рис.32, а, б).

При графоаналитическом решении используется метод плана сил. Механизм расчленяется на структурные группы Ассур и начальные звенья. Расчет ведется, начиная с последней структурной группы и заканчивается расчетом входного звена.

При расчете структурных групп к ним прикладываются все действующие силы, включая силы инерции и реакции отброшенных связей. Каждая из неизвестных реакций, при необходимости, может быть разложена на две составляющие по выбранным направлениям, например, вдоль оси звена (нормальная  $F^n$ ) и перпендикулярно оси (тангенциальная  $F^t$ ). При равенстве числа уравнений статики числу неизвестных реакций их можно определить аналитически и графически, построив многоугольник (план) сил. Неизвестные определяются из условия замкнутости векторной суммы сил. Рассмотрим примеры:

1) Двухповодковая группа с вращательными парами:

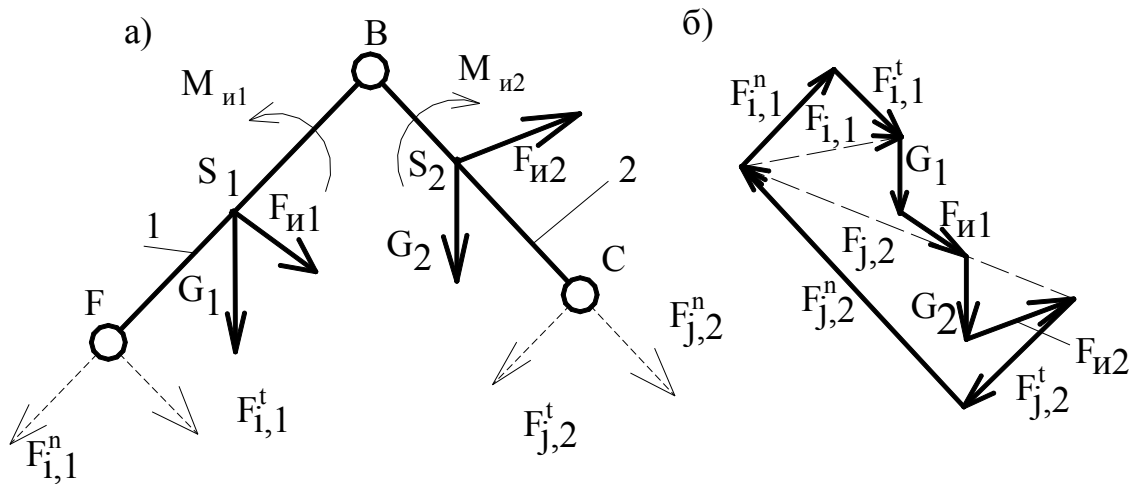


Рис.33

$F_{i,1}^t$  определяется из уравнения моментов для звена 1 -  $\sum M_B = 0$  относительно т. В. (рис.33, а);

$F_{j,2}^t$  определяется из уравнения моментов для звена 2 -  $\sum M_B = 0$  относительно т. В (рис.33,а).

При отрицательных значениях реакций необходимо изменить их направления на противоположные.

$F_{i,1}^n$  и  $F_{j,2}^n$  определяются из плана сил (рис.33,б), полученного на основе векторного уравнения;

$$\sum F_k = 0, \text{ где } F_k - \text{силы, действующие на структурную группу.}$$

2) Двухповодковая группа шатун-ползун (рис.34, а, б)

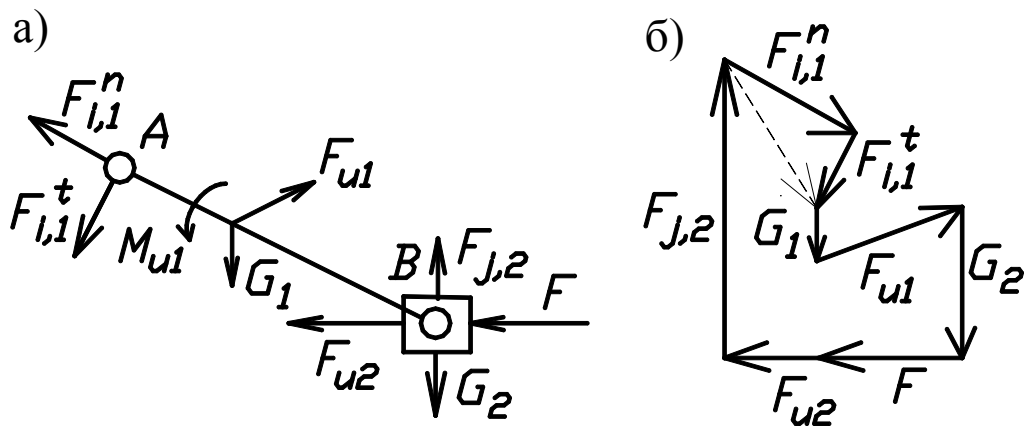


Рис. 34

$F_{j,2}$  определяется из уравнения моментов -  $\sum M_A=0$  относительно т. А.  $F_{i,1}=F_{i,1}^n+F_{i,1}^t$  определяется из плана сил (рис.34,б) на основе векторного уравнения  $\sum F_k=0$ .

3) Двухповодковая группа кулиса-камень (рис.35, а)

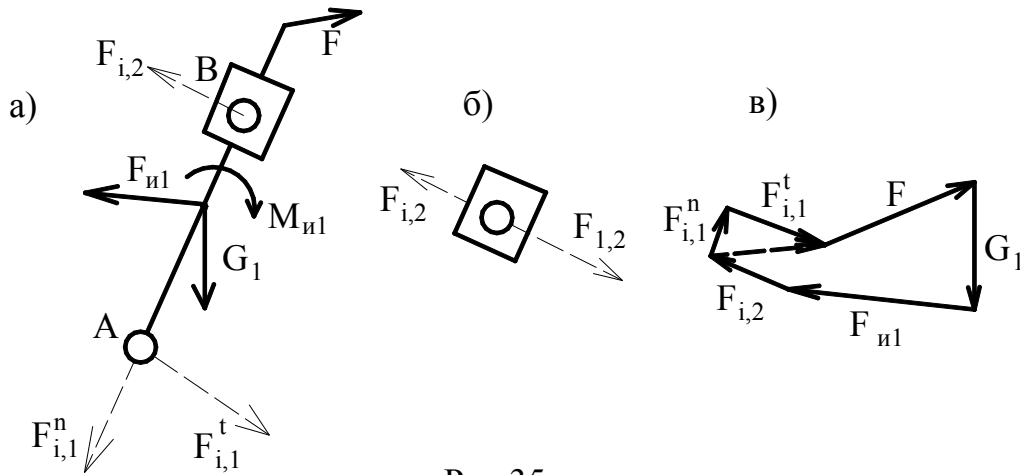


Рис.35

$F_{j,2}$  определяется из уравнения моментов -  $\sum M_A=0$ .  $F_{i,1}=F_{i,1}^n+F_{i,1}^t$  определяется из плана сил (рис.35, в), на основе векторного уравнения  $\sum F_k=0$ . При этом особенность расчета данной группы Ассур состоит в возможности некоторого упрощения вычислений в случае, когда весом камня 2 можно пренебречь. Тогда реакция  $F_{j,2}$  противоположна реакции  $F_{1,2}$  и перпендикулярна АВ, т.е. линия ее действия известна (рис.35, б).

4) Входное (начальное) звено (рис.36, а).

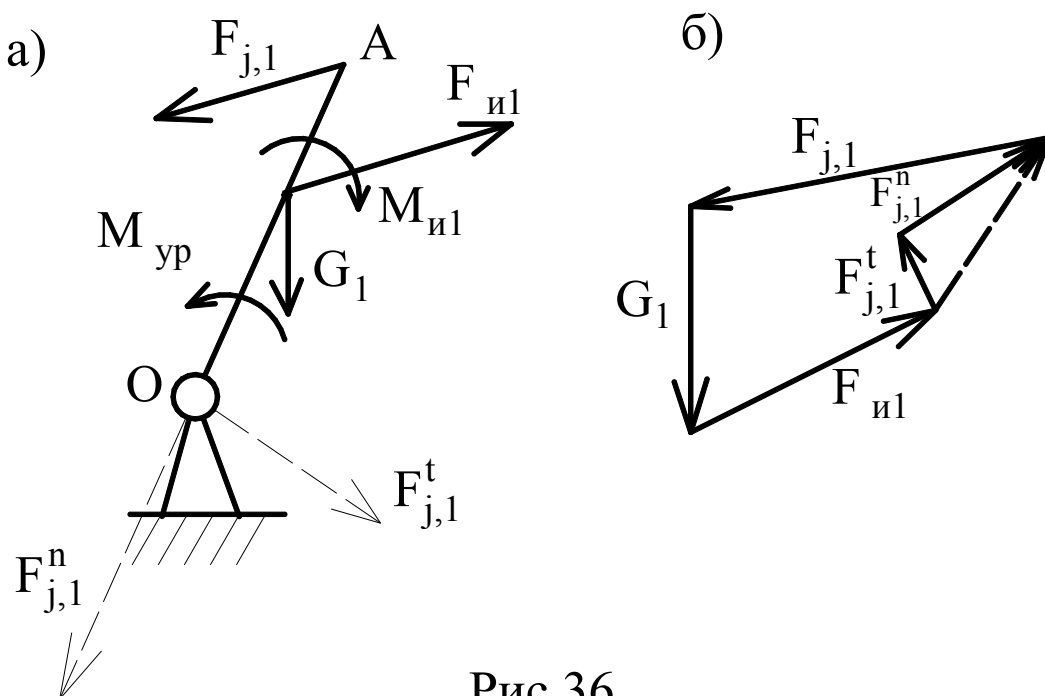


Рис.36

$M_{ур}$  определяется из уравнения моментов -  $\sum M_o=0$ .

$F_{j,1} = F_{j,1}^n + F_{j,1}^t$  определяется из плана сил (рис.36,б) согласно векторному уравнению  $\sum F_k = 0$ .

## **6. Синтез рычажных механизмов**

### **6.1. Постановка задачи, виды и способы синтеза**

Задачи синтеза рычажных механизмов в общем случае являются сложными задачами оптимального проектирования, включающими этапы структурного, кинематического и динамического расчёта. Поэтому для упрощения решения рассматриваются частные задачи, в которых учитываются лишь некоторые (основные) условия проектирования.

В зависимости от исходных данных различают следующие виды синтеза:

- геометрический, когда заданы отдельные положения звеньев или траектории отдельных точек;
- кинематический, когда заданы некоторые скорости, ускорения или их соотношения;
- динамический, когда заданы действующие силы или наложены некоторые ограничения на динамические параметры.

К способам синтеза относятся:

- а) опытный, когда экспериментальным путём подбираются размеры звеньев для реализации заданной траектории;
- б) графический;
- в) аналитический.

Возможны различные комбинации видов и способов синтеза, перечисленных выше.

### **6.2. Решение задач оптимального синтеза стержневых механизмов**

При постановке задачи оптимального синтеза следует различать входные и выходные параметры.

Входные – это изначально заданные параметры (размеры звеньев, скорости, ускорения или их соотношения).

Выходные – это параметры, определяемые в результате решения задачи.

При синтезе необходимо учитывать ряд требований кинематического, конструктивного, технологического характера и т. д., среди которых одно, как правило, является главным, а остальные – второстепенными (дополнительными). Если главное требование записать математически в виде функции

$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где  $x_1, x_2$  - выходные параметры, то такая функция называется *функцией цели* (целевой), при этом дополнительные условия, выраженные в виде  $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq, =, \geq b_i$  при  $(i = 1, 2, \dots, m)$ , называются ограничениями.

Задачей оптимального синтеза является обеспечение экстремального значения  $Z$  при соблюдении всех ограничений.

Например, выразив вес механизма в виде функции  $Z$  его параметров (длин звеньев) можно решать задачу минимизации  $Z$  при соблюдении условий его существования. К таким условиям относятся условия проворачивания кривошипа в шарнирном четырёхзвеннике, условие соблюдения заданного угла давления и ряд других.

При малом числе выходных параметров решение задачи оптимизации может быть получено в аналитической форме. В противном случае используются численные методы направленного, случайного или комбинированного поиска оптимальных решений.

### 6.3. Условия проворачиваемости кривошипа в шарнирном четырёхзвеннике

При проектировании (синтезе) четырёхшарнирного механизма одним из учитываемых условий может быть проворачиваемость звеньев, то есть наличие одного или двух кривошипов. Это зависит от соотношения длин звеньев. Например, для того, чтобы звено  $AB$  четырёхзвенника (рис. 37) могло стать кривошипом, оно должно последовательно пройти через два крайних положения.

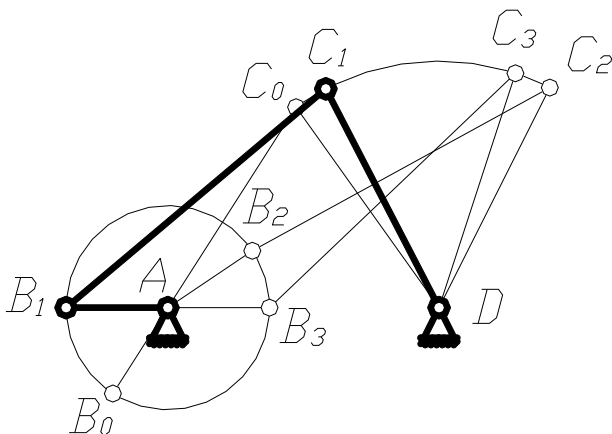


рис.37

Используя три положения механизма, получим следующие условия:

для положений 1, 2, 3, предварительно обозначив длины звеньев:

$$l_{AB} = a; l_{BC} = b; l_{CD} = c; l_{AD} = d.$$

При этом:

$$a + d < b + c \text{ — положение 1;}$$

$$a + b < d + c \text{ — положение 2;}$$

$$c < b + d - a \text{ или } a + c < b + d \text{ — положение 3;}$$

то есть сумма длин кривошипа и любого другого звена меньше суммы остальных звеньев.

Сложим попарно полученные неравенства и получим:

$a < c$ ;  $a < d$ ;  $a < b$ , то есть кривошип является самым коротким звеном. А если данные условия не выполняются, то механизм будет либо двухкривошипным, либо двухкоромысловым. Эти условия используются при геометрическом синтезе.

#### 6.4. Учёт углов давления в стержневых механизмах

Углы давления во многом определяют условия работы механизма. Так как угол давления  $\alpha$  (рис. 38), измеряемый между вектором силы и вектором скорости в точке её приложения, влияет на трение и износ в кинематических парах, то эти углы, в частности их максимальные значения при синтезе ограничивают для исключения возможности заклинивания и уменьшения коэффициента полезного действия.

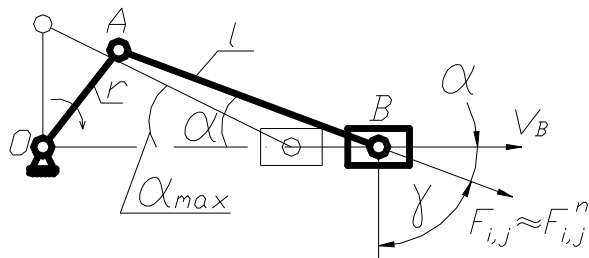


рис. 38

Для упрощения расчётов, связанных с определением углов давления, обычно пренебрегают тангенциальными составляющими реакций, что позволяет находить наихудшие положения с точки зрения риска заклинивания и назначать длины звеньев  $l_{\min}$ , обеспечивающие приемлемые условия работы при заданном предельном угле  $\alpha_{\text{дон}}$ .

(рис. 38), то есть при  $\alpha_{\max} \leq \alpha_{\text{дон}}$ . —  $l \geq l_{\min} = \frac{r}{\sin \alpha_{\text{дон}}}$ .

Углы  $\gamma = 90^\circ - \alpha$  называются углами передачи и ограничиваются при проектировании величиной  $\gamma_{\min}$ .

#### 6.5. Синтез четырёхзвенника по трём заданным положениям шатуна

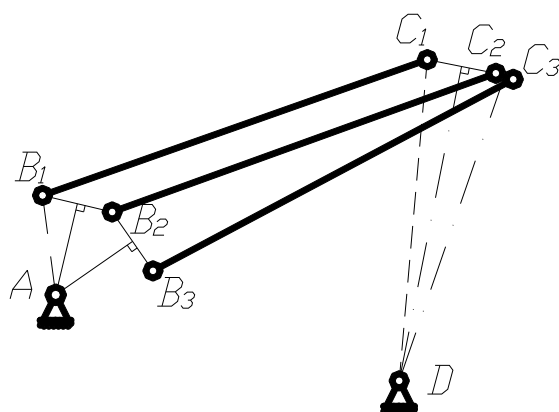


рис. 39

Так как точки В и С шарнирного четырёхзвенника описывают дуги окружностей (рис. 39), то проведя перпендикуляры через середины хорд, соединяющих концы шатуна в трёх положениях, получим центры вращения звеньев АВ и CD (точки А и D). Вид синтеза – геометрический; способ синтеза – графический.



## 6.6. Синтез кривошипно-кулисного механизма по заданному коэффициенту изменения скорости хода

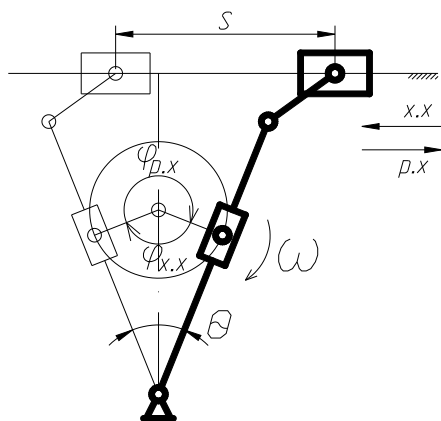


рис. 40

Одной из кинематических характеристик стержневого механизма может служить коэффициент изменения скорости хода  $k_V$  представляющий собой отношение средней скорости холостого хода  $V_{x.x.}$  к средней скорости рабочего хода  $V_{p.x.}$ .

При равномерном движении кривошипа коэффициент  $k_V$  равен:

$$k_V = \frac{V_{x.x.}}{V_{p.x.}} = \frac{S}{t_{x.x.}} \cdot \frac{t_{p.x.}}{S} = \frac{180^\circ + \theta}{\omega} \cdot \frac{\omega}{180^\circ - \theta} = \frac{180^\circ + \theta}{180^\circ - \theta},$$

где  $S$  – ход ползуна;  $t_{p.x.}$  и  $t_{x.x.}$  – время рабочего и холостого хода;  $\omega$  – угловая скорость кривошипа;  $\theta$  – угол размаха кулисы.

При заданном  $k_V$  можно определить  $\theta$  или наоборот. Используя дополнительные конструктивные соображения, можно определить размеры всех звеньев механизма.

Вид синтеза – кинематический; способ – графо-аналитический.

## 6.7. Синтез кривошипно-ползунного механизма по некоторым заданным размерам

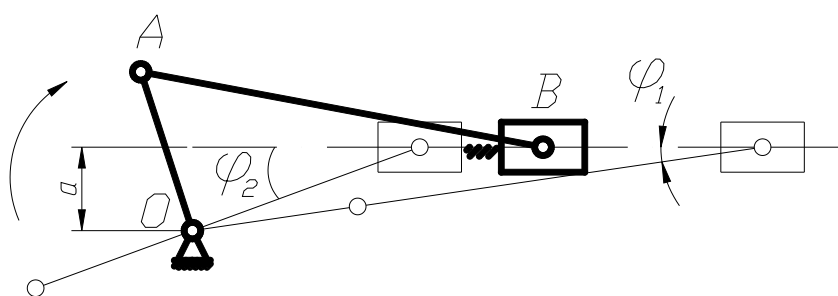


рис. 41

Кривошипно-ползунный механизм характеризуется пятью параметрами:

$$a, \varphi_1, \varphi_2, r = l_{OA}, l = l_{AB}$$

(рис. 40), при этом можно записать два аналитических выражения, связывающие эти параметры:

$$\sin \varphi_1 = \frac{a}{l+r}; \quad \sin \varphi_2 = \frac{a}{l-r}.$$

Таким образом, задавая три параметра из пяти, можно определить два оставшихся из указанных выражений. Например, задав величины  $a$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , можно определить  $r$  и  $l$ .

Вид синтеза – геометрический; способ – аналитический.

## 6.8. Понятие о синтезе механизма по заданному закону движения выходного звена

Пусть задан закон движения ведомого звена (угла поворота коромысла -  $\Psi$ ) в зависимости от угла поворота кривошипа  $\varphi$ , например, в четырёхшарнирном механизме (рис. 42).

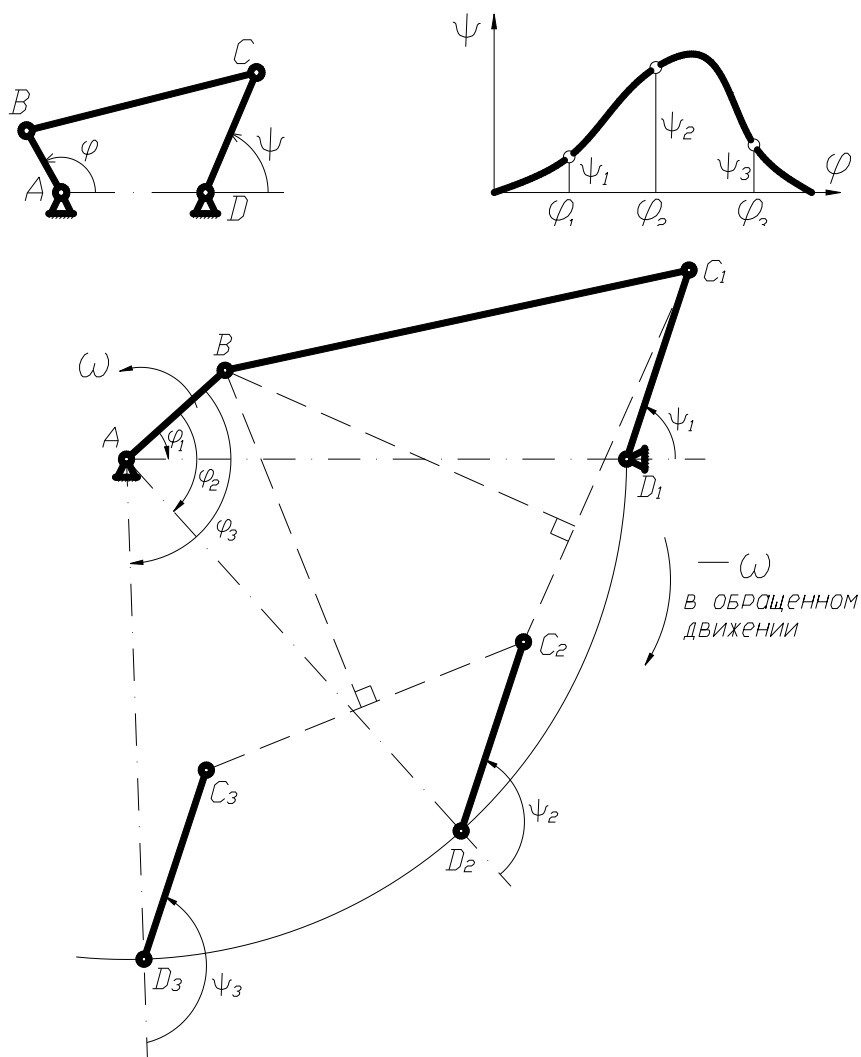


рис. 42

Приближенный синтез включает разбивку всего интервала по оси графика  $\Psi(\varphi)$  по оси абсцисс  $\varphi$  на участки, соответствующие трём произвольным значениям  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ . Используется метод обращения движения, когда механизму условно задаётся движение, обратное кривошипу. Если заданы длина коромысла и межцентровое расстояние, то по трём положениям в обращённом движении можно найти размеры шатуна и кривошипа согласно рис. 42, где т. В находят как центр вращения т. С в обращённом движении. Существует постановка задачи, когда отыскивается оптимальный закон движения с точки зрения различных параметров: скорости, ускорения, работы динамических сил и т. д.

## 6.9. Понятие о синтезе механизма по заданной траектории

Часто требуется спроектировать механизм с заданной траекторией движения ведомого звена. Например, четырёхшарнирный механизм стрелы портального крана позволяет перемещать груз горизонтально при вращении стрелы в вертикальной плоскости (рис. 43). Синтез

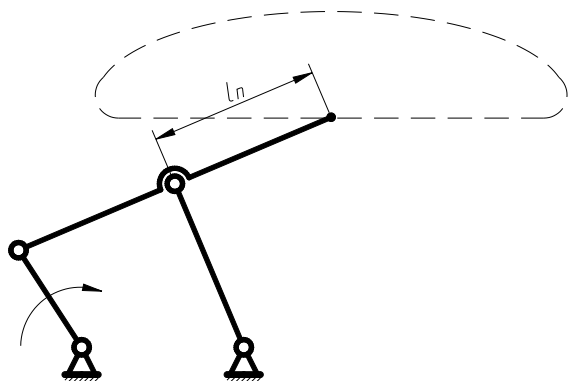


рис. 43

таких механизмов осуществляется графическими и аналитическими методами с использованием теории функций с наибольшим приближением к заданной траектории. В этой области имеются работы Чебышева, который первым предложил решение задачи для лямбдообразного прямолинейного Чебышева, положенного в основу конструкции стрелы портального крана (рис. 43).

Искомыми параметрами являются длины звеньев, включая и длину  $l_n$ .

## 6.10. Общий порядок проектирования рычажного механизма

Процесс проектирования рычажного механизма включает следующие основные этапы:

1. Производится синтез кинематической схемы (определяются длины звеньев по заданным условиям).
2. Принимается упрощённый закон движения входного звена, определяются скорости и ускорения звеньев, производится приближённый силовой расчёт (определяются реакции в кинематических парах).
3. По найденным усилиям подбираются сечения звеньев и определяются их массы.
4. Производится приведение сил и масс, подбор маховика и определение истинного закона движения звена привода.
5. При найденном законе движения звена привода находятся уточнённые значения скоростей и ускорений, определяются более точные величины реакций и производится проверка прочности и жёсткости звеньев. Размеры сечений и массы звеньев последовательно уточняются.

Иногда используют более простую последовательность, в которой расчёт ведётся при заданных длинах и массах звеньев, а также при упрощённом законе движения входного звена.

## 7. Кулачковые механизмы

### 7.1. Классификация кулачковых механизмов

Кулачковые механизмы содержат хотя бы одну высшую кинематическую пару и состоят из кулачка, толкателя и стойки (рис. 44).

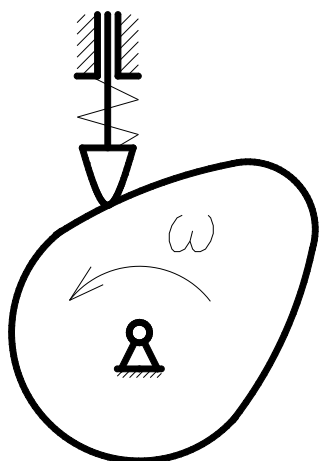


рис. 44

Степень подвижности такого механизма равна:

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_5 - p_4 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1.$$

Основными достоинствами кулачковых механизмов является возможность получения заранее заданного закона движения толкателя с помощью кулачка. К недостаткам следует отнести большое удельное давление в точке контакта кулачка с толкателем, а также сложность изготовления профиля кулачка.

Постоянный контакт толкателя с кулачком обеспечивается с помощью кинематического (рис. 45, а) или силового замыкания (рис. 45, б).

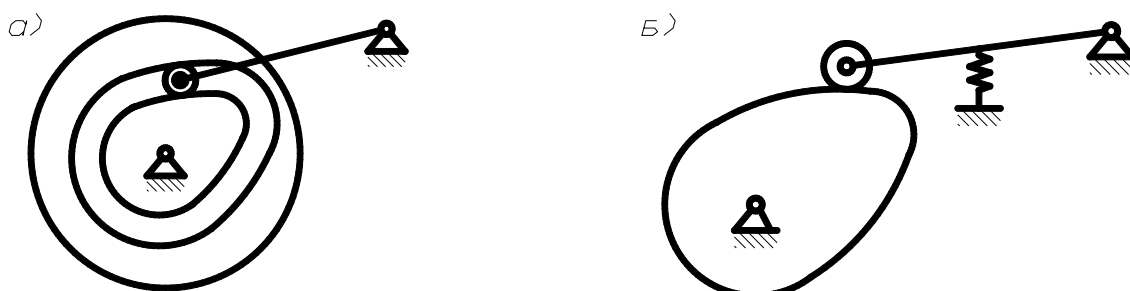


рис. 45

В зависимости от характера движения кулачка и толкателя возможно преобразование вращательного или поступательного движения кулачка во вращательное или поступательное движение толкателя (рис. 44, 45, 46).

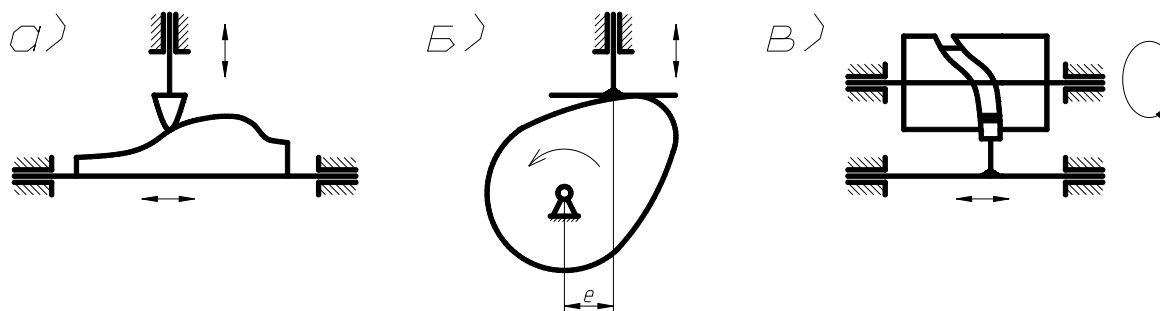


рис. 46

Кулачковые механизмы могут быть плоскими (рис. 46, а, б) и пространственными (рис. 46, в), осевыми ( $e=0$ ) и внеосевыми ( $e \neq 0$ ) с плоским, тарельчатым



цирования графиков  $S(t)$ ,  $S(\varphi)$ ,  $V(t)$ ,  $\frac{dS}{d\varphi}(\varphi)$ .

Движение толкателя имеет реверсивный характер за весь кинематический цикл, при этом наблюдаются 4 фазы движения толкателя, соответствующие 4 фазовым углам поворота кулачка:  $\varphi_y$  - угол удаления (подъёма) толкателя;  $\varphi_o$  - угол дальнего выстоя;  $\varphi_e$  - угол возврата (опускания);  $\varphi_b$  - угол ближнего выстоя.

С целью непосредственного определения скоростей и ускорений толкателя осуществляют условную замену высшей пары на низшую. Замена осуществляется так, что движение заменяемого механизма в момент замены соответствует движению заменяющего.

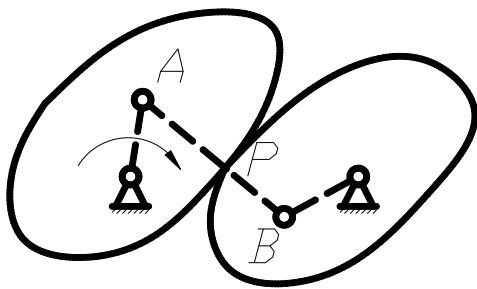


рис.49

В общем случае мгновенный заменяющий механизм представляет шарнирный четырёхзвенник с подвижными шарнирами A и B, расположенными в центрах кривизны, контактирующих в точке P профилей (рис. 49).

В частных случаях возможны различные варианты замены (рис 50), при этом можно производить кинематический анализ кулачкового механизма как обычного стержневого.

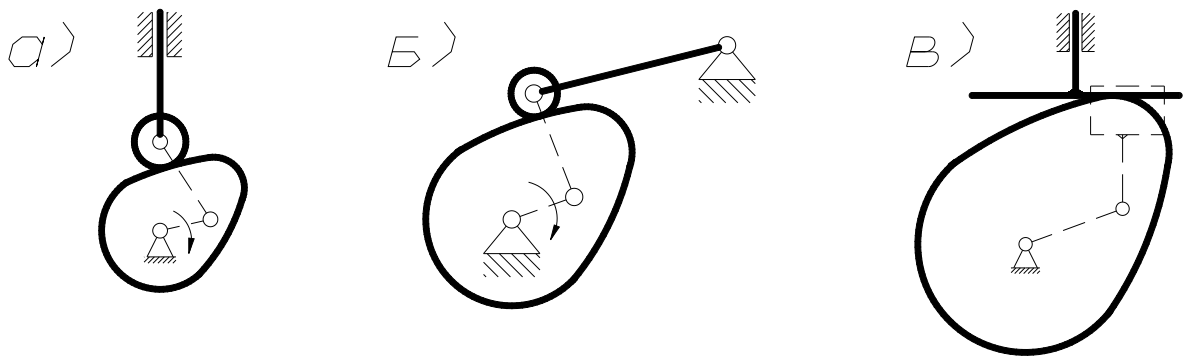


рис. 50

### 7.3. Некоторые вопросы динамического анализа кулачковых механизмов

Условия нормальной работы звеньев кулачкового механизма в существенной степени зависят от угла давления  $\alpha$  между вектором усилия  $F$ , действующего на толкатель со стороны кулачка, и вектором скорости  $V$  толкателя (рис.51,а).



рис. 51

Угол давления – переменная величина, с увеличением которой возрастает опасность заклинивания механизма, т. к. увеличивается составляющая  $F_x$ , вызывающая трение в кинематических парах (рис. 51).

Обычно величину  $\alpha_{\max}$  ограничивают подбором размеров кулачка при условии что:

$$\alpha_{\max} \leq \begin{cases} 30^\circ & \text{— для механизмов с поступательным движением толкателя,} \\ 45^\circ & \text{— для механизмов с коромысловым толкателем.} \end{cases}$$

Рассмотрим задачу определения текущего угла  $\alpha$  для любого положения механизма. Построим заменяющий кривошипно-ползунный механизм OAB, где точка A совпадает с центром кривизны кулачка в точке его контакта с роликом.

Рассмотрим план скоростей заменяющего механизма (рис. 51, б), где:

*Драв* ~  $\Delta OAK$  ( $\Delta$  с взаимноперпендикулярными сторонами), т. е.

$$\frac{l_{OK}}{l_{OA}} = \frac{\overline{pb}}{\overline{pa}} = \frac{V_B}{V_A} = \frac{dS/dt}{\omega \cdot l_{OA}} = \frac{dS/dt}{l_{OA} \cdot d\phi/dt}, \text{ отсюда } l_{OK} = \frac{dS}{d\phi}.$$

Таким образом, отложив вектор  $dS/d\phi$  от точки B в направлении вектора скорости  $V$  толкателя, повернутого на  $90^\circ$  в сторону вращения кулачка и проведя линию  $mn$  через точку O и конец вектора  $dS/d\phi$ , получим угол  $\alpha$  (рис. 51).

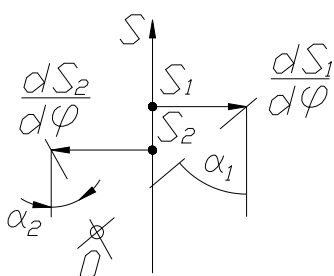


рис. 52

Можно решить обратную задачу, находя положение центра “O” вращения кулачка при заданных значениях  $\alpha$  и  $dS/d\phi$  для двух положений толкателя (рис. 52).

Из рис. 52 видно, что чем больших значений достигают углы давления  $\alpha$ , тем меньшие габариты имеет механизм, но риск заклинивания при этом увеличивается.

## 7.4. Синтез кулачковых механизмов

При проектировании кулачковых механизмов используются различные методы синтеза.

Если известен минимальный радиус ( $r_{min}$ ) кулачка и закон его движения, то построение профиля – задача кинематического синтеза. Если  $r_{min}$  должен определяться с условием отсутствия заклинивания, то построение профиля – задача динамического синтеза.

### 7.4.1. Выбор закона движения толкателя

Вопрос о выборе закона движения толкателя отпадает в случае, если он полностью определяется той операцией, которую толкатель осуществляет, т. е. задан. Однако во многих случаях заданы лишь частичные перемещения, скорости или ускорения толкателя и необходимо подобрать какой-либо закон движения на недостающих участках.

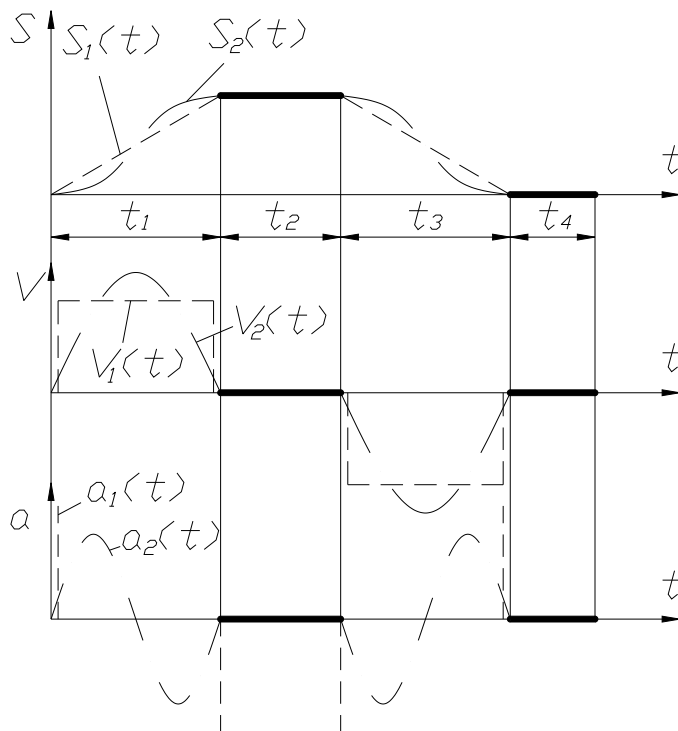


рис. 53

Например, может быть задано максимальное и минимальное перемещение толкателя по двум участкам  $t_2$  и  $t_4$  (рис. 53) в виде графика  $S(t)$ , показанного основной линией. На остальных участках  $t_1$  и  $t_3$  закон движения следует выбрать.

Из всех возможных законов движения необходимо выбирать оптимальный с точки зрения условий работы механизма. Одним из таких законов является синусоидальный закон  $S_2(t)$ , обеспечивающий плавную безударную работу

механизма без резких изменений скорости и без больших значений ускорений, как, например, при выборе закона  $S_1(t)$ , где ускорения, а следовательно силы инерции достигают больших величин, способных вызвать износ и поломку.



## 7.4.2. Профилирование кулачка

Рассмотрим графический метод получения профиля кулачка как задачу кинематического синтеза. В этом случае заданы схема кулачкового механизма, закон движения толкателя и  $r_{min}$  кулачка. Профилирование осуществляется на основе закона движения толкателя. В качестве примера рассмотрим профилирование кулачка в осевом механизме с поступательно движущимся толкателем. При этом дана схема механизма, диаграмма движения толкателя и  $r_{min}$  кулачка (рис. 54).

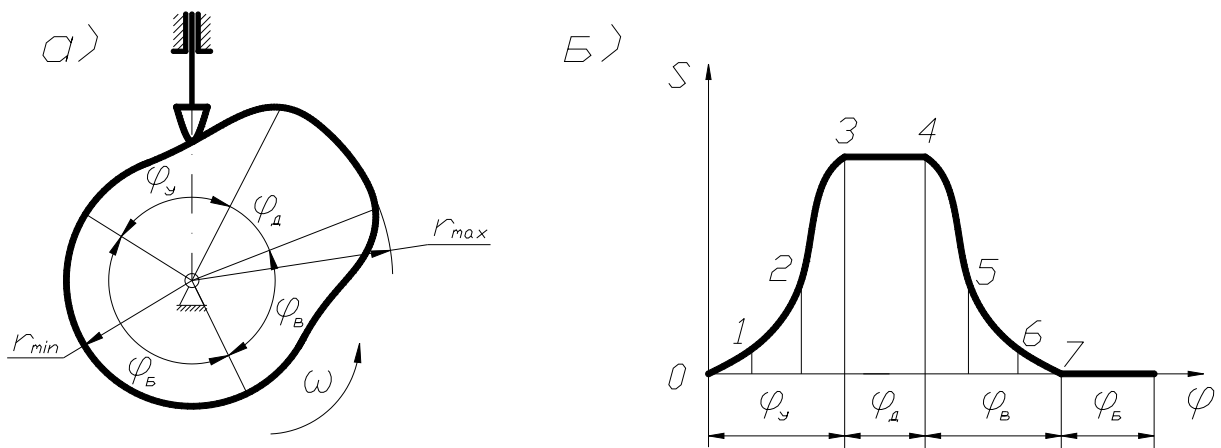


рис. 54

В начале размечаются основные размеры механизма в масштабе  $\mu_l$ , а также фазовые углы, причём углы  $\varphi_y$  и  $\varphi_b$  делятся на ряд равных частей в соответствии с диаграммой (рис. 54, б). Строятся начальное, а затем ряд последующих положений толкателя в обратном движении (рис. 55, а), и полученные точки соединяются плавной кривой. В случае построения профиля кулачка для механизма с роликовым толкателем сначала строится эквидистанта (центральной профиль) как и в предыдущем случае, а затем и сам рабочий профиль кулачка, отстоящий от эквидистанты на величину радиуса ролика  $r_{рол}$  (рис. 55, б).

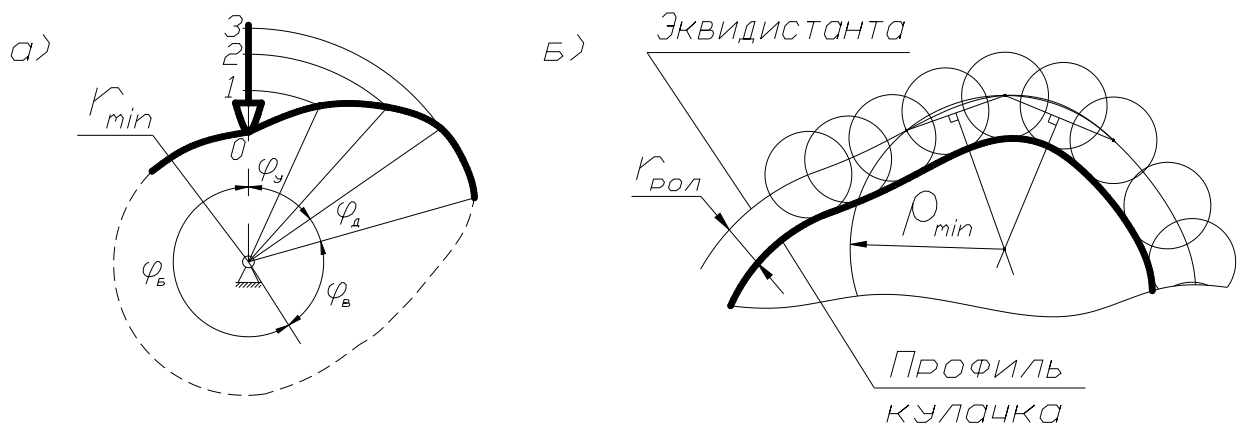


рис. 55

Величина  $r_{пол}$  выбирается из соотношения:  $r_{пол} \leq \min \begin{cases} 0,4 \cdot r_{min}; \\ 0,8 \cdot \rho_{min}; \end{cases}$

где  $\rho_{min}$  – минимальный радиус центрального профиля кулачка, который можно определить графически по трём точкам в месте наибольшей кривизны эквидистанты (рис. 55, б).

Профилирование кулачка механизма с коромысловым толкателем состоит из аналогичных операций, т. е. после разметки межцетровых расстояний строится ряд положений коромысла в обратном движении (рис. 56) в соответствии с заданной диаграммой  $S(\varphi)$ , часть которой показана на рис. 56, б.

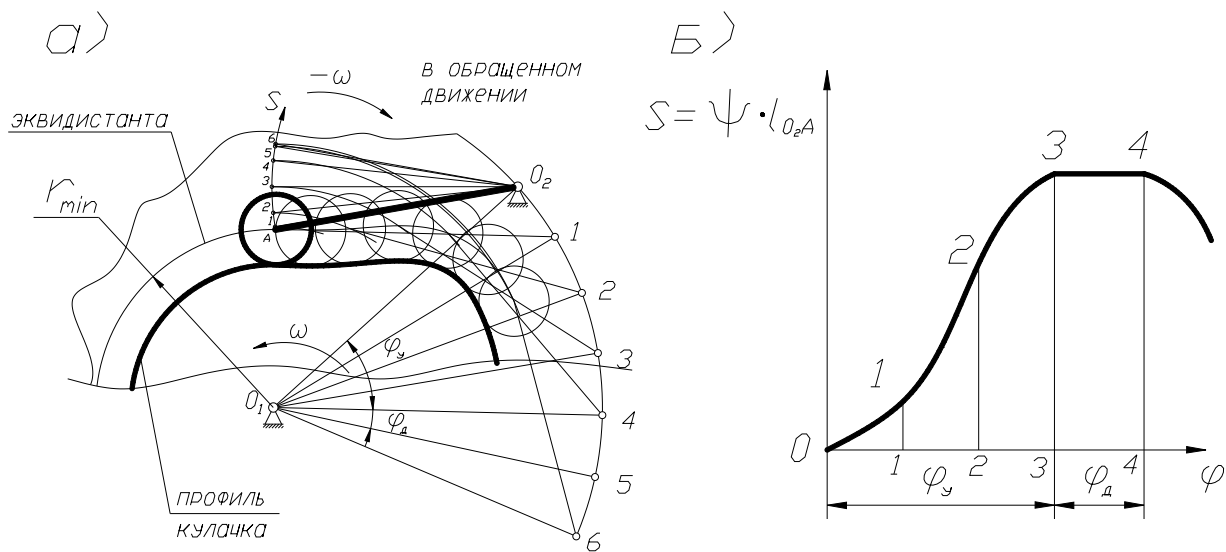


рис. 56

### 7.4.3. Динамический синтез кулачкового механизма

Задача динамического синтеза заключается в нахождении центра вращения кулачка, при условии минимизации размеров механизма, когда заданы: закон движения толкателя и предельно допустимый угол давления  $\alpha_{дон}$ . В конечном итоге задача состоит в определении  $r_{min}$  кулачка, после чего может быть решена задача кинематического синтеза (профилирование).

Рассмотрим пример определения  $r_{min}$  кулачка для механизма с поступательно движущимся толкателем, когда заданы диаграммы перемещений  $S(\varphi)$  и аналогов скоростей  $dS/d\varphi(\varphi)$ , которые должны быть вычерчены в едином масштабе  $\mu_S = \mu_{dS/d\varphi} = \dots$

Путём исключения параметра  $\varphi$  вычерчивается совмещённая диаграмма  $S(dS/d\varphi)$ , как показано на рис. 57.

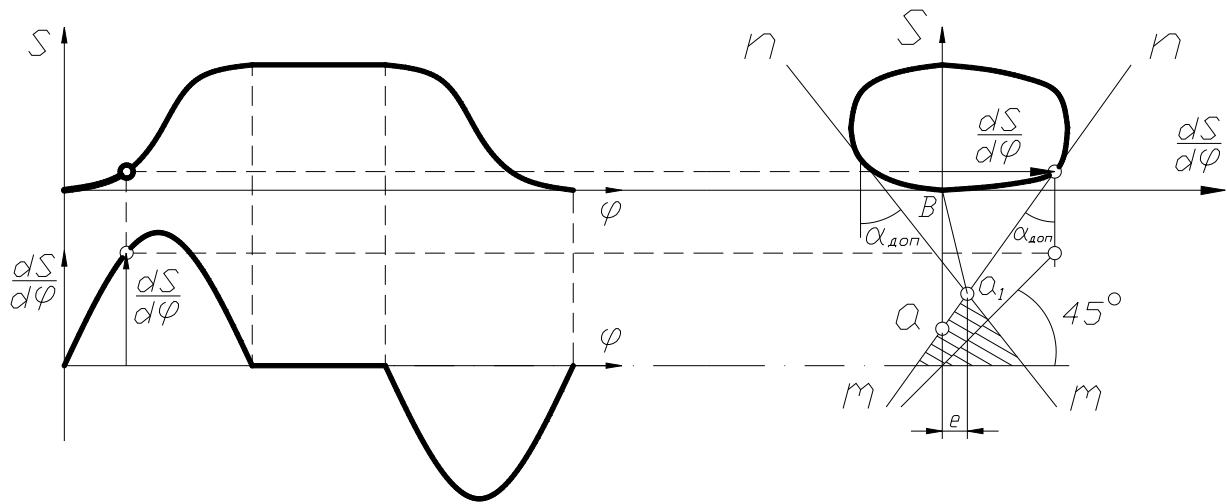


рис. 57

Проведя касательные  $mn$  к диаграмме  $S(dS/d\varphi)$  под углами  $\alpha_{доп}$ , как показано на рис. 57, получим точку  $a_1$  на их пересечении. Тогда отрезок  $\overline{a_1b}$  будет соответствовать в масштабе  $\mu_s$  величине  $r_{\min} = \mu_s \cdot \overline{a_1b}$  для внеосного механизма со смещением оси толкателя  $e \neq 0$  относительно центра вращения кулачка. Так как центр кулачка можно располагать в любой точке заштрихованной области, то при  $e=0$  получим  $r_{\min} = \mu_s \cdot \overline{ab}$ , когда центр кулачка совпадает с осью толкателя. Таким образом, габариты механизма уменьшаются при  $e \neq 0$ , т. к. центр кулачка приближается к точке  $b$ , а предельный угол давления  $\alpha_{доп}$  остаётся неизменным.

Обычно при силовом замыкании такие построения делаются только для фазы удаления, т. к. на фазе возврата толкатель является ведущим звеном и заклинивания не происходит.

Для механизма с коромысловым толкателем построение совмещённой диаграммы  $S(dS/d\varphi)$  производится в пределах заданного максимального угла размаха коромысла  $\Psi_{\max}$ . Причём отрезки, равные  $dS/d\varphi$  откладываются в масштабе  $\mu_l$  от траектории точки  $A$  коромысла по его оси в сторону вектора  $dS/d\varphi$ , повернутого на  $90^\circ$  в направлении вращения кулачка (рис. 58).

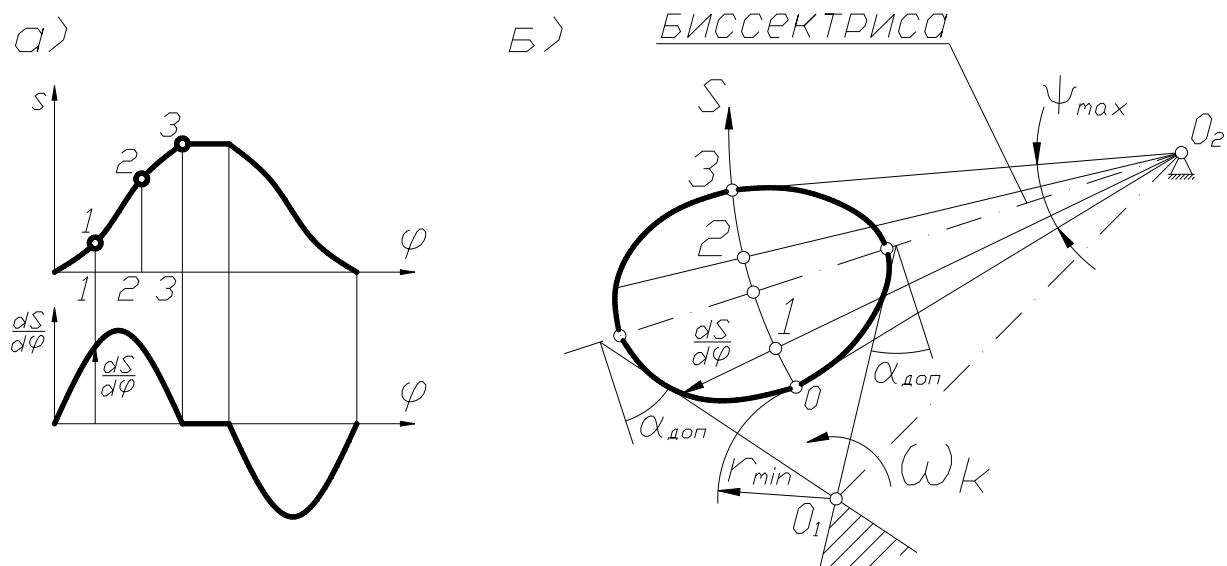


рис. 58

Точки, полученные для нескольких положений коромысла, соединяют плавной кривой и строят допускаемую зону размещения центра вращения кулачка, которую приближённо можно получить, проведя касательные к диаграмме  $S(dS/d\varphi)$  под углами  $\alpha_{доп}$ , образованными биссектрисой угла  $\Psi_{max}$  и перпендикулярами к ней (см. рис. 58, б). Выбранное положение центра  $O_1$  в допускаемой (заштрихованной) зоне определяет величину  $r_{min}$  и межцентровое расстояние  $O_1O_2$  между кулачком и коромыслом.

#### 7.4.4. Аналитический способ синтеза кулачковых механизмов

При аналитическом методе синтеза вместо диаграмм в графической форме используются аналитические зависимости  $S(\varphi)$ ,  $\frac{dS}{d\varphi}(\varphi)$  и т. д. Например, для осевого кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем профиль кулачка может быть представлен аналитической зависимостью вида:

$$r = r_{min} + S(\varphi).$$

При заданном  $r_{min}$  и известной зависимости  $S(\varphi)$  можно получить профиль кулачка с любой заданной степенью точности.

### 7.4.5. Понятие о проектировании пространственных кулачковых механизмов

Распространённым методом синтеза пространственных механизмов является условная их замена плоским кулачковым механизмом. Тогда задача сводится к синтезу плоского механизма. Например, задача проектирования механизма с поступательно движущимся толкателем и вращающимся кулачком сводится при заданном законе  $S(\varphi)$  к построению развёртки цилиндра, на которой по данным диаграммы строится теоретический и действительный профиль кулачка (рис. 59).

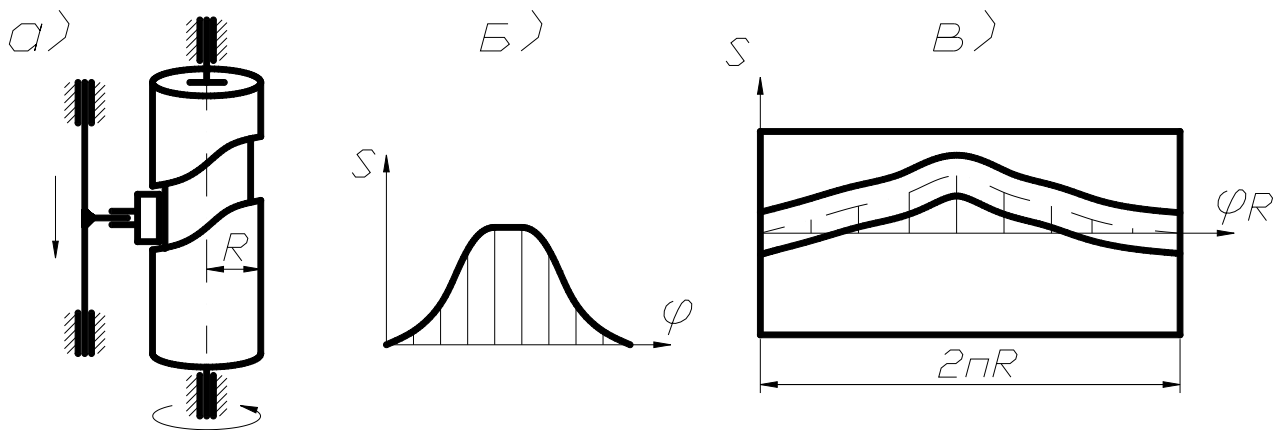


рис. 59

### 7.4.6. Проектирование кулачковых механизмов с плоским (тарельчатым) толкателем

В механизме с плоским толкателем угол давления во всех положениях равен нулю (рис. 60, а), поэтому он не может быть использован для определения центра вращения кулачка. В этом случае используют условие выпуклости профиля кулачка  $\rho > 0$  ( $\rho$  – радиус кривизны профиля).

Заменяя кулачковый механизм стержневым (рис. 60, б), план ускорения которого можно построить из условия подобия (рис. 60, в):

$$\Delta KAE \sim \Delta \pi k e,$$

получим 
$$\frac{KE}{KA} = \frac{\overline{\pi e}}{\pi k} = \frac{d^2 S / dt^2}{\omega^2 \cdot KA} = \frac{d^2 S / d\varphi^2 \cdot (d\varphi / dt)^2}{(d\varphi / dt)^2 \cdot KA},$$

т. е. 
$$KE = \frac{d^2 S}{d\varphi^2} \quad \text{и} \quad \rho = \frac{d^2 S}{d\varphi^2} + r_{\min} + S > 0 \quad \text{или}$$

$$r_{\min} > -\left(\frac{d^2 S}{d\varphi^2} + S\right).$$

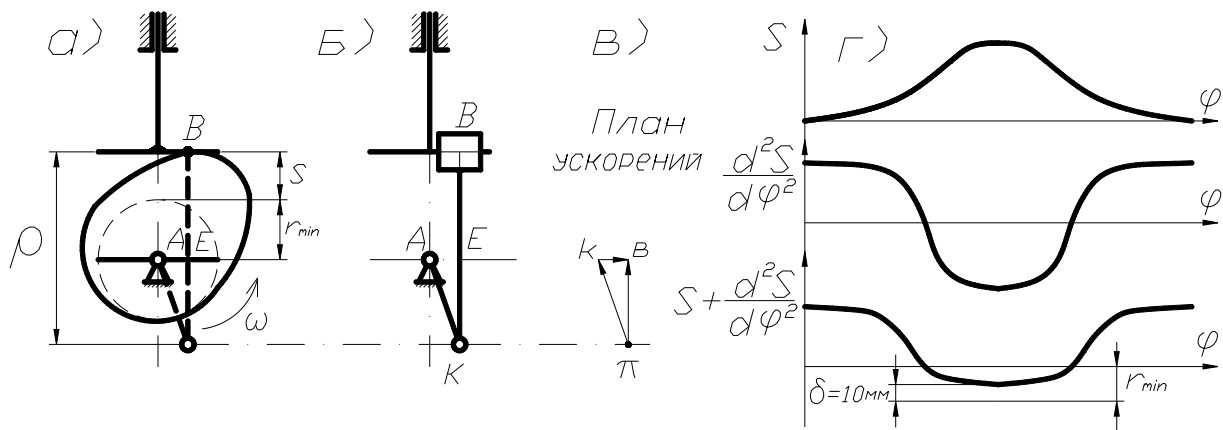


рис. 60

Следовательно, просуммировав две диаграммы  $S(\varphi)$  и  $\frac{d^2S}{d\varphi^2}(\varphi)$ , построенные в одном масштабе  $\mu_S = \mu_{d^2S/d\varphi^2} = \dots$ , получим величину  $r_{min}$  (рис. 61, г) имеющую несколько большее значение, чем абсолютная величина отрицательной ординаты на суммарной диаграмме.

## 8. Фрикционные и зубчатые механизмы

Фрикционные и зубчатые механизмы предназначены для передачи вращательного движения с одного вала на другой с помощью деталей типа диска в основном цилиндрической формы. При этом, как правило, меняется величина угловой скорости и передаваемого момента, а также их направление. Вал, от которого передаётся движение, называется ведущим, а вал, которому передаётся движение – ведомым.

Оси валов могут быть параллельными, пересекаться или перекрещиваться под различными углами. В первом случае механизм является плоским, в остальных случаях механизмы пространственные.

### 8.1. Общие сведения о передачах вращения

Если в механизме имеются только ведущие и ведомые валы и отсутствуют промежуточные вращающиеся звенья, то механизм называется *передачей*. Передача вращения может осуществляться:

1) путём непосредственного соприкосновения двух дисков, жёстко связанных с ведущим и ведомым валами (фрикционная, червячная, зубчатая);

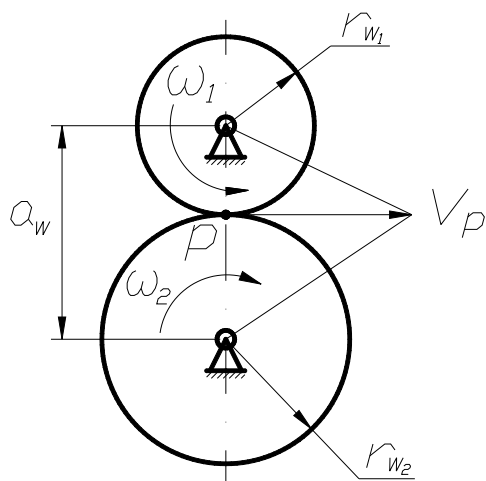
2) посредством промежуточных гибких тел, сцепляющихся с дисками, которые жёстко связаны с ведущим и ведомым валами (ременная, цепная, волновая).

Отношения угловых скоростей вращения обоих валов передачи называется *передаточным отношением* ( $i$ ), которое характеризует процесс преобразования движения количественно.

Отношения угловой скорости ведущего вала к угловой скорости ведомого называется *передаточным числом* ( $u$ ), которое определяет направление передачи энергии.

Величина  $i$  и  $u$  может меняться или оставаться постоянным за время одного оборота ведущего вала.

Любую передачу можно схематично представить в виде двух начальных поверхностей, контактирующих между собой, а плоскую передачу – в виде двух начальных окружностей, перекатывающихся друг по другу без скольжения и контактирующих в полюсе  $p$  (рис. 61). Тогда



$$V_p = r_{w1} \cdot \omega_1 = r_{w2} \cdot \omega_2, \text{ т. е.}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}} = i_{1,2} - \text{ передаточное число.}$$

рис. 61

Аналогично можно изобразить ременную или цепную передачи, а также пространственные передачи (рис. 62).

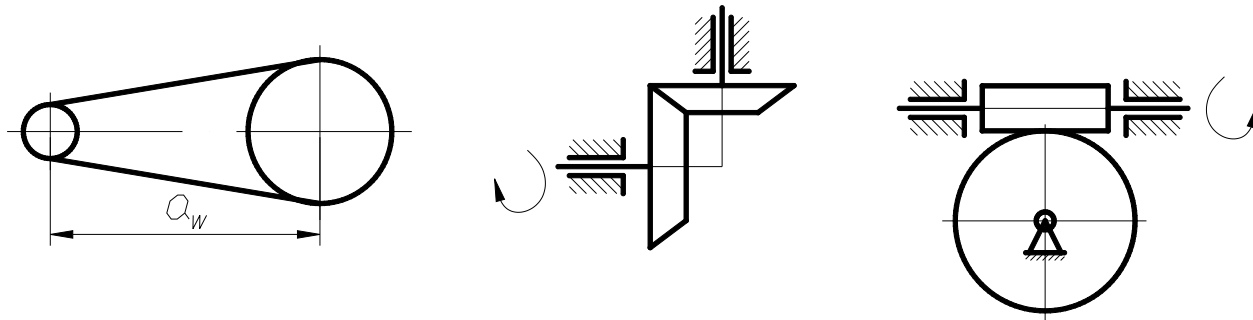
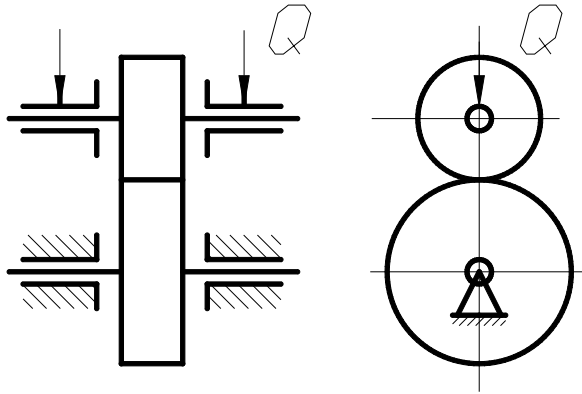


рис. 62

## 8.2. Фрикционные передачи

Одной из наиболее простых и во многих случаях достаточно надёжной является фрикционная передача, состоящая в простейшем случае из двух колёс



(катков), закреплённых на ведущем и ведомом валах. Для передачи движения без скольжения необходимо приложить к одному из колёс силу  $Q$ , достаточную для возникновения трения в месте контакта (рис. 63), при этом касательная сила их сцепления равна по величине передаваемого окружному усилию.

рис. 63

Фрикционные передачи могут быть с постоянным и переменным передаточным отношением. Последние называются *вариаторами* (рис. 64 а, б).

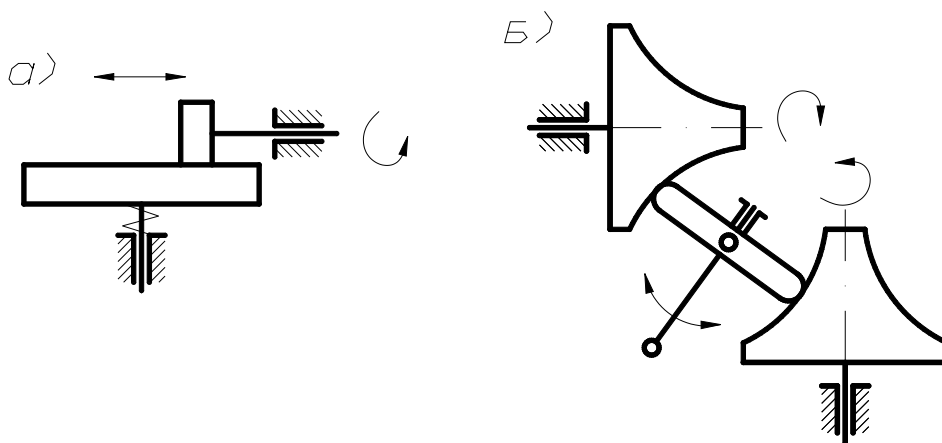


рис. 64

Достоинствами фрикционных передач являются: плавность и бесшумность в работе, простота конструкции, невозможность поломки при резком изменении крутящего момента на одном из валов благодаря возможности проскальзывания катков, возможность бесступенчатого регулирования скоростей.

Недостатками являются: необходимость прижимного устройства, непостоянство передаточного отношения, невозможность передачи значительных крутящих моментов.

В связи с указанными недостатками фрикционные передачи не получили такого широкого распространения как зубчатые.



### 8.3. Зубчатые передачи. Виды и классификация

Зубчатые передачи осуществляют передачу вращательного движения с одного вала на другой с помощью цилиндрических, конических, червячных колёс, имеющих специально профилированные зубья, при этом зубчатые колёса могут иметь прямые, косые, спиральные, шевронные зубья и др. (рис. 65).

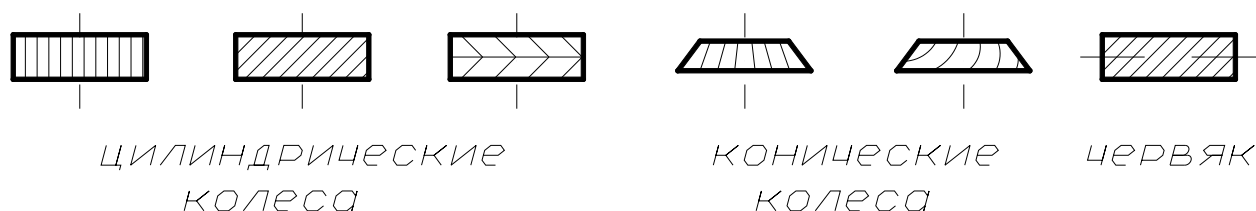


рис. 65

При использовании непрямозубых колёс повышается плавность и бесшумность работы и увеличивается нагрузочная способность передачи.

В зубчатых передачах с пересекающимися осями в качестве начальных поверхностей используются усечённые конусы, вершины которых пересекаются в одной точке (рис. 66, а), а в передачах с перекрещивающимися осями теоретическими начальными поверхностями являются гиперболоиды вращения (рис. 66,б). Такие передачи называются *гиперболоидными*.

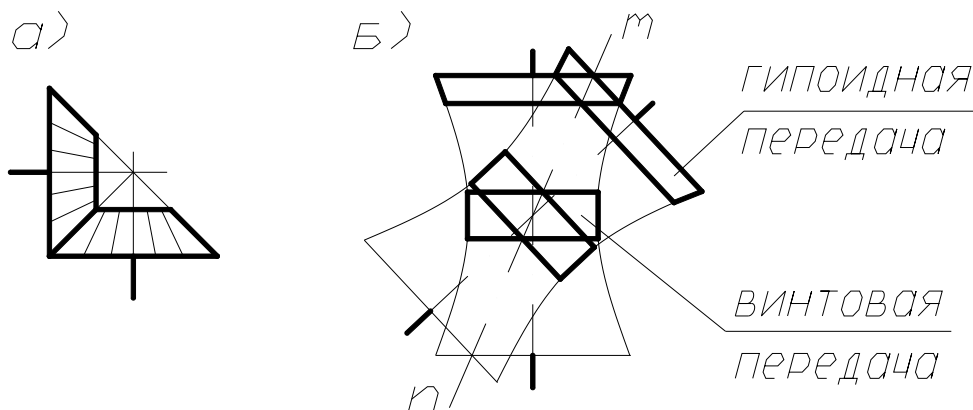


рис. 66

Контакт зубьев 2-х колёс в таких передачах происходит по прямолинейным образующим  $mn$ . В машиностроительной практике ограничиваются отдельными короткими частями гиперболоидов. Например, используя среднюю часть гиперболоидов, получают винтовую зубчатую передачу, а если использовать усечённые конусы, близкие по профилю к гиперболоидам в их широкой части, то получим так называемую *гипоидную передачу* (рис. 66, б).

Частным случаем винтовой передачи является червячная передача, в которой малое колесо называется *червяком*, а большое – *червячным колесом* (рис. 67, а, б).

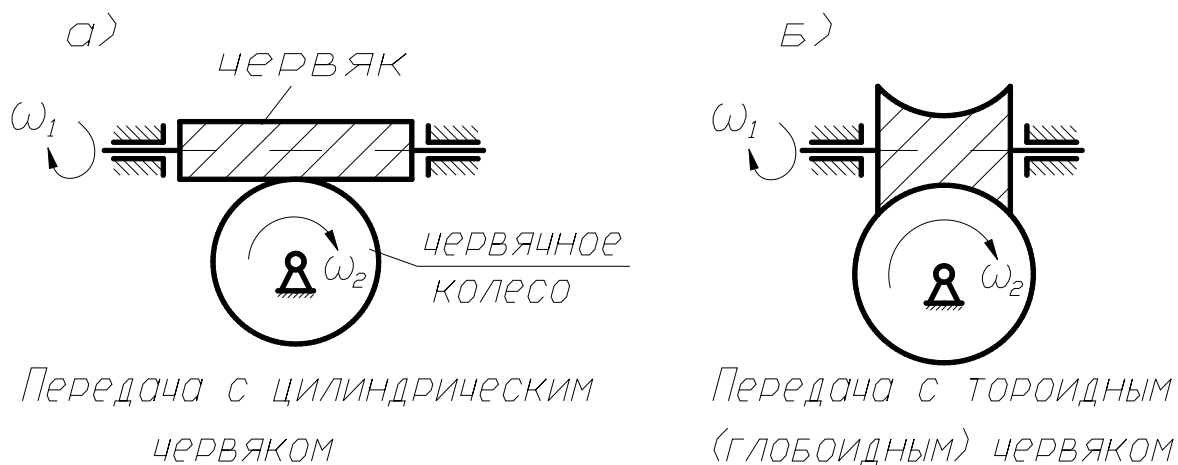


рис. 67

Червячные передачи могут быть с одно и многозаходными червяками, при этом число заходов червяка равно числу его зубьев.

Червячные передачи позволяют обеспечить большое передаточное отношение при сравнительно малых габаритах вследствие малого числа зубьев (заходов) на червяке, т. к.  $i_{1,2} = \frac{Z_2}{Z_1}$  ( $Z_1, Z_2$  – число зубьев колёс). Однако коэффициент полезного действия (КПД) передачи низок.

Предельные значения передаточных отношений для зубчатой пары составляет:

- 1...6 – для цилиндрических передач;
- 1...4 – для конических передач;
- 10...40 – для червячно-винтовых передач.

По форме профиля зуба различают передачи *эвольвентные*, *циклоидальные*, *цевочные*, а также *передачи с зацеплением Новикова*.

Наибольшее распространение получили эвольвентные передачи с профилем, предложенным Леонардом Эйлером в 1754 г. Преимуществом этого профиля является простота изготовления, достаточно высокая нагрузочная способность, малая чувствительность к неточностям межцентрового расстояния. Однако эвольвентный профиль удовлетворяет не всем требованиям, предъявляемым к современным зубчатым передачам. Так, например, в мощных передачах внешнего зацепления, где контактируют выпуклые зубья с малыми радиусами кривизны профилей, происходит их быстрое разрушение из-за недостаточной контактной прочности. Одним из путей повышения контактной прочности является использование внутреннего зацепления, в котором профиль зуба одного из колёс во-

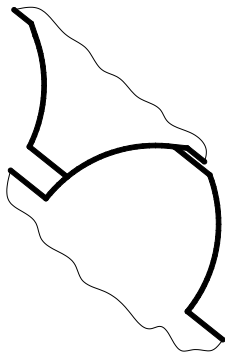


рис. 68

гнутый. Другой путь – применение передач с зацеплением Новикова, где выпуклые профили зубьев одного из колёс, очерченные по дуге окружности, контактируют в вогнутыми профилями другого колеса (рис. 68). При этом нагрузочная способность передачи повышается в 2-3 раза по сравнению с эвольвентной, а также уменьшаются потери на трение.

Одной из интересных и перспективных передач является так называемая волновая передача (рис. 69), состоящая из жёсткого 1 и гибкого 2 зубчатых колёс, а также генератора волн 3 с роликами 4. При

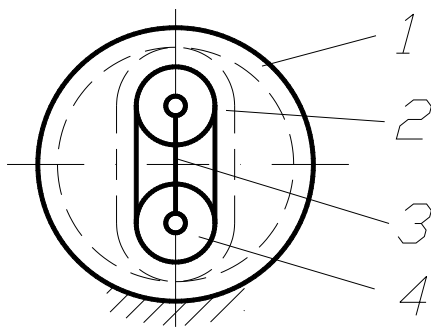


рис. 69

вращении генератора 3, благодаря разнице чисел зубьев жёсткого и гибкого колёс, приводится во вращение колесо 2, причём передаточное отношение может быть очень большим ( $i = 40 \dots 400$ ). Автор волновой передачи – Массер (США, 1959 г.) указывал на возможность использования треугольного профиля зубьев.

К зубчатым передачам относятся передачи с некруглыми, секторными колёсами, колёсами, имеющими зубья на части обода и др.

Обычно в зубчатых передачах меньшее колесо называется *шестерней*.

Выбор той или иной передачи зависит от традиционной области её применения и конкретных функциональных особенностей механизма, в котором эта передача будет использована.

#### 8.4. Основная теорема зацепления (теорема Виллиса)

Для постоянства передаточного отношения при зацеплении двух профилей зубьев необходимо, чтобы радиусы начальных окружностей зубчатых колёс, перекатывающихся друг по другу без скольжения, оставались неизменными. Если рассмотреть обращённое движение начальных окружностей, когда всей системе задана угловая скорость ( $-\omega_2$ ), то второе колесо будет условно неподвижным и точка  $P$  является мгновенным центром относительного вращения колёс (рис. 70, а). Эта точка, называемая *полюсом зацепления*, где контактируют начальные окружности, делит межцентровое расстояние на отрезки, обратно пропорциональные угловым скоростям, т. к.

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w_2}}{r_{w_1}} = const \quad \text{при} \quad r_w = const .$$

Рассмотрим обращённое движение профилей зубьев зубчатых колёс (рис. 70, б).

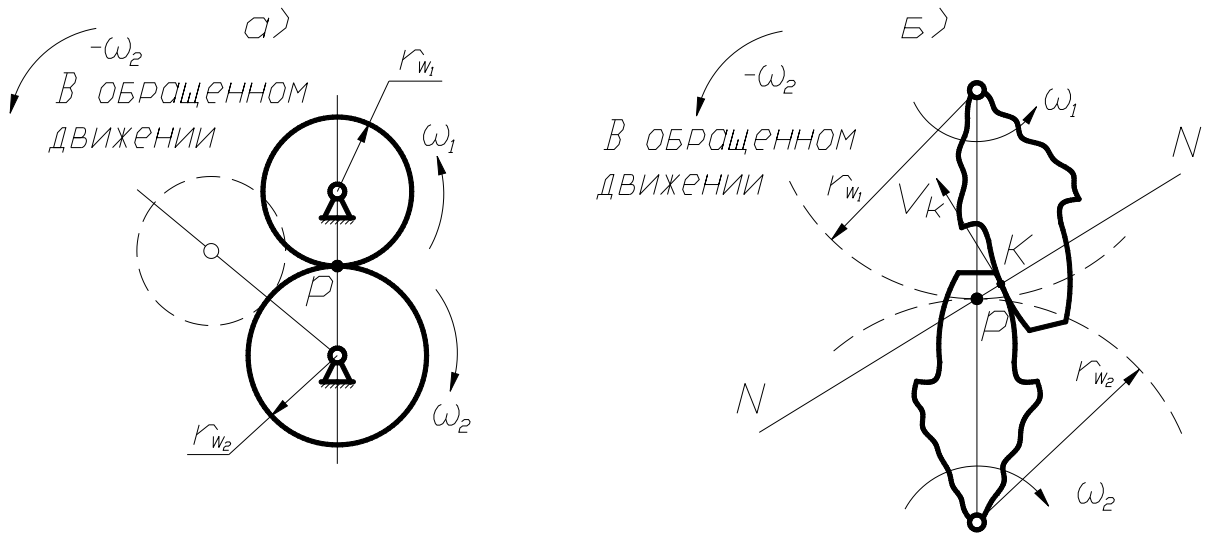


рис. 70

Точка контакта зубьев (точка  $k$ ), принадлежащая первому колесу, вращается вокруг точки  $P$ , которая будет мгновенным центром скоростей. Скорость  $V_k \perp PK$  и совпадает с общей касательной к профилям в точке  $k$  при условии постоянства этого контакта.

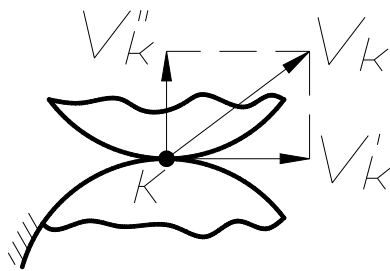


рис. 71

В противном случае постоянного контакта не будет, так как появится составляющая  $V''_k$  и профили разомкнутся (рис. 71). Так как рассматривается произвольное положение зубьев, то можно сформулировать теорему.

Нормаль  $NN'$  к касающимся профилям зубьев, проведённая через точку их касания, делит межцентровое расстояние на части, обратно пропорциональные угловым скоростям.

Эта теорема, сформулированная Виллисом в 1841 г., определяет основной закон зацепления профилей, которые не могут быть произвольными, а должны быть специально подобраны.

## 8.5. Эвольвента и её свойства

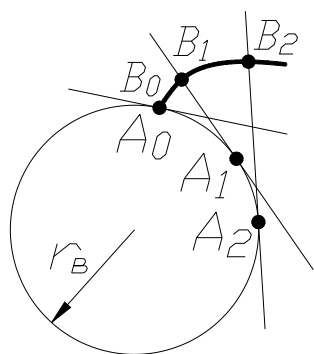


рис. 72

Эвольвента имеет следующие свойства:

- 1) начинается с основной окружности;
- 2) нормаль к эвольвенте является касательной к основной окружности;
- 3) радиус кривизны эвольвенты в каждой её точке лежит на нормали к эвольвенте в этой точке.

Основная окружность представляет собой геометрическое место центров кривизны эвольвенты и является её *эволютой*.

## 8.6. Геометрия эвольвентного зацепления

В процессе зацепления зубья касаются друг друга различными точками профиля (рис. 73). Так как эти точки лежат на нормали к профилям, которая од-

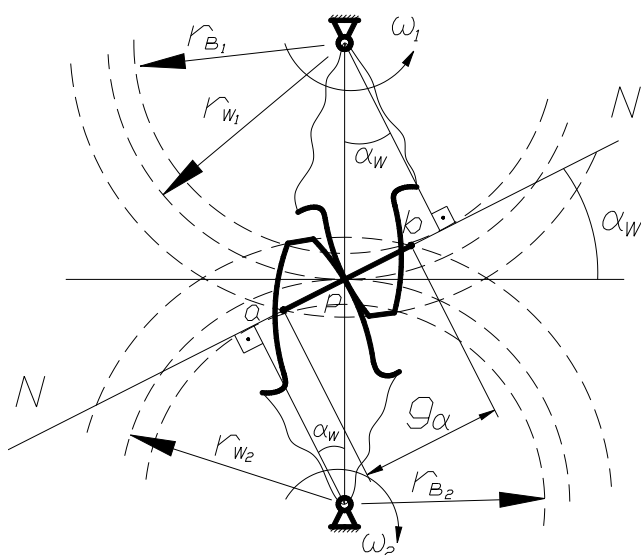


рис. 73

новременно является касательной к обеим основным окружностям, то совокупность точек касания (линия  $\overline{ab}$ ) совпадает с общей для обеих основных окружностей касательной  $NN$ . Эта линия называется *теоретической линией зацепления*, а линия  $\overline{ab}$  длиной  $g_a$  является её активной частью, где располагаются все точки контакта зубьев. Угол  $\alpha_w$ , измеряемый между нормалью  $NN$  к профилям в полюсе зацепления  $P$  и общей касательной к обеим начальным окружностям, называется *углом зацепления*. Таким образом:

им начальным окружностям, называется *углом зацепления*. Таким образом:

$$r_{b_1} = r_{W_1} \cdot \cos \alpha_w ; \quad r_{b_2} = r_{W_2} \cdot \cos \alpha_w .$$

## 8.7. Качественные показатели зацепления

Одним из качественных показателей зубчатой передачи является коэффициент перекрытия  $\varepsilon_\alpha$ , равный  $\varepsilon_\alpha = g_\alpha / p_b$ , где  $p_b$  – шаг по основной окружности (расстояние между одноимёнными точками двух соседних зубьев, измеренное по дуге основной окружности). Коэффициент  $\varepsilon_\alpha$  показывает сколько пар зубьев в среднем одновременно находится в зацеплении. Для прямозубой передачи обычно  $1 < \varepsilon_\alpha < 2$ . Чем больше  $\varepsilon_\alpha$ , тем более плавно и бесшумно работает передача.

Другим качественным показателем является коэффициент скольжения, который учитывает влияние геометрии передачи и её кинематики на скольжение и износ профилей, скользящих друг по другу (рис. 74), что видно из картины скоростей. На этой картине:

$V_{k_1}$  - скорость точки  $k$  первого колеса;

$V_{k_1}^t$  - проекция этой скорости на касательную к контактирующим профи-

лям;

$V_{k_2}$  и  $V_{k_2}^t$  - тоже для колеса 2.

Скорость скольжения колеса 1 и 2 относительно друг друга равна:

$$V_{ck} = V_{k_1 k_2} = V_{k_1}^t - V_{k_2}^t.$$

Коэффициенты скольжения колёс 1 и 2 равны:

$$\lambda_1 = \frac{V_{ck}}{V_{k_1}^t}; \quad \lambda_2 = \frac{V_{ck}}{V_{k_2}^t}.$$

Эти коэффициенты равны нулю в полюсе (точка  $P$ ) и увеличиваются с удалением от него по линии зацепления.

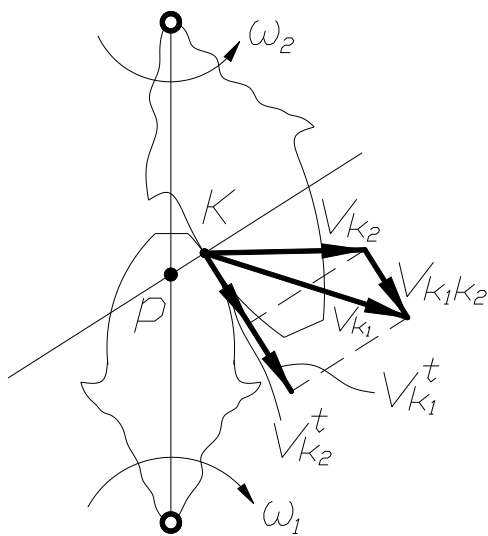


рис. 74

Таким образом, чем длиннее линия зацепления, (то есть, чем больше коэффициент перекрытия  $\varepsilon_\alpha$ ), тем больше скольжение и износ профилей зубьев.

## 8.8. Основные параметры зубчатых колёс

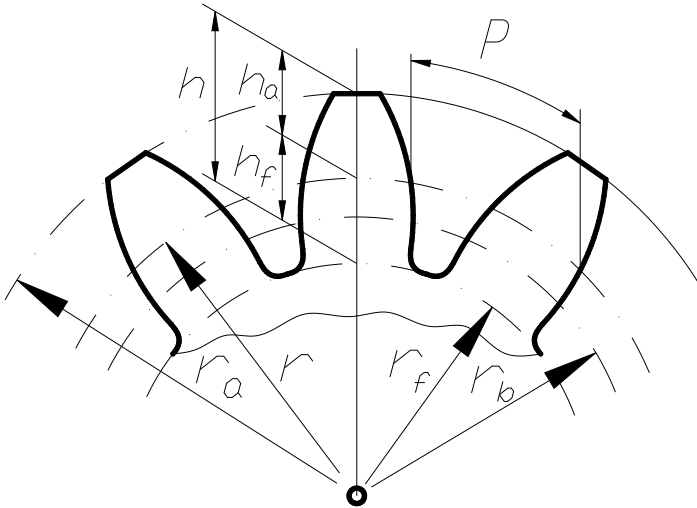


рис. 75

Основными параметрами зубчатого колеса являются (рис. 75):

$z$  – число зубьев;

$r_a$  – радиус (диаметр) окружности выступов;

$r_f$  – радиус (диаметр) окружности впадин;

$r_b$  – радиус (диаметр) основной окружности;

$r$  – радиус (диаметр) делительной окружности, т. е. окружности, которая является начальной в ста-

ночном зацеплении колеса с режущим инструментом;

$p$  – шаг по делительной окружности;

$h$  – высота зуба, равная  $h = h_a + h_f$ , где:

$h_a$  – высота головки зуба;

$h_f$  – высота ножки зуба;

$m$  – модуль зацепления, определяемый из условия:

$$2\pi r = zp, \text{ т. е. } \frac{2r}{z} = \frac{p}{\pi} = m \text{ (измеряется в мм).}$$

Величина  $m$  стандартизирована, а делительная окружность является окружностью стандартного модуля.

Обычно размеры зубчатого колеса и зубьев выражаются через  $m$ .

Так, например:  $h_a = h_a^* \cdot m$ , где  $h_a^*$  – коэффициент высоты головки зуба;

$h_f = (h_a^* + c^*) \cdot m$ , где  $c^*$  – коэффициент радиального зазора;

$r = 0,5 \cdot m \cdot z$ ;  $p = \pi \cdot m$ ;  $r_b = r \cdot \cos \alpha = 0,5 \cdot m \cdot z \cdot \cos \alpha$ , где  $\alpha$  – угол исходного контура режущего инструмента.

Обычно для стандартных зубчатых колёс:  $h_a^* = 1$ ;  $c^* = 0,25$ ;  $\alpha = 20^\circ$ .

## 8.9. Методы нарезания зубчатых колёс

Существует два принципиально различных метода нарезания:

- 1) метод копирования; 2) метод обкатки.

В первом случае впадина зубчатого колеса фрезеруется на универсальном фрезерном станке фасонными дисковыми или пальцевыми фрезами, профиль которых соответствует профилю впадины (рис. 76). Затем заготовку поворачивают

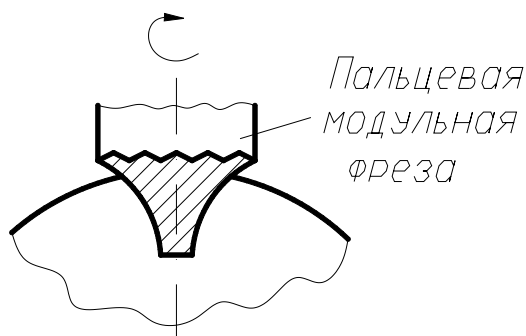


рис. 76

на угол  $360^\circ/Z$  и нарезают следующую впадину. При этом используется делительная головка, а также имеются наборы фрез для нарезания колёс с различным модулем и различным числом зубьев. Метод непроизводителен и применяется в мелкосерийном и единичном производстве.

Второй метод обката или огибания может производиться с помощью инструментальной рейки (гребёнки) на зубострогальном станке; долбяком на зубодолбёжном станке или червячной фрезой на зубофрезерном станке. Этот метод высокопроизводителен и применяется в массовом и крупносерийном производстве. Одним и тем же инструментом можно нарезать колёса с различным числом зубьев. Нарезание с помощью инструментальной рейки имитирует реечное зацепление (рис. 77, а), где профиль зуба образуется как огибающая последовательных положений профиля инструмента, угол исходного контура которого  $\alpha=20^\circ$  (рис. 77, б). Зацепление между режущим инструментом и нарезаемым колесом называется *станочным*. В станочном зацеплении начальная окружность всегда совпадает с делительной.

Самым производительным из рассмотренных методов является зубофрезерование с помощью червячных фрез, которые находятся в зацеплении с заготовкой по аналогии с червячной передачей (рис. 77, в).

При нарезании долбяком осуществляется его возвратно поступательное движение при одновременном вращении. Фактически при этом осуществляется зацепление заготовки с инструментальным зубчатым колесом – долбяком



(рис. 77, г). Этот метод чаще всего используется при нарезании внутренних зубчатых венцов.

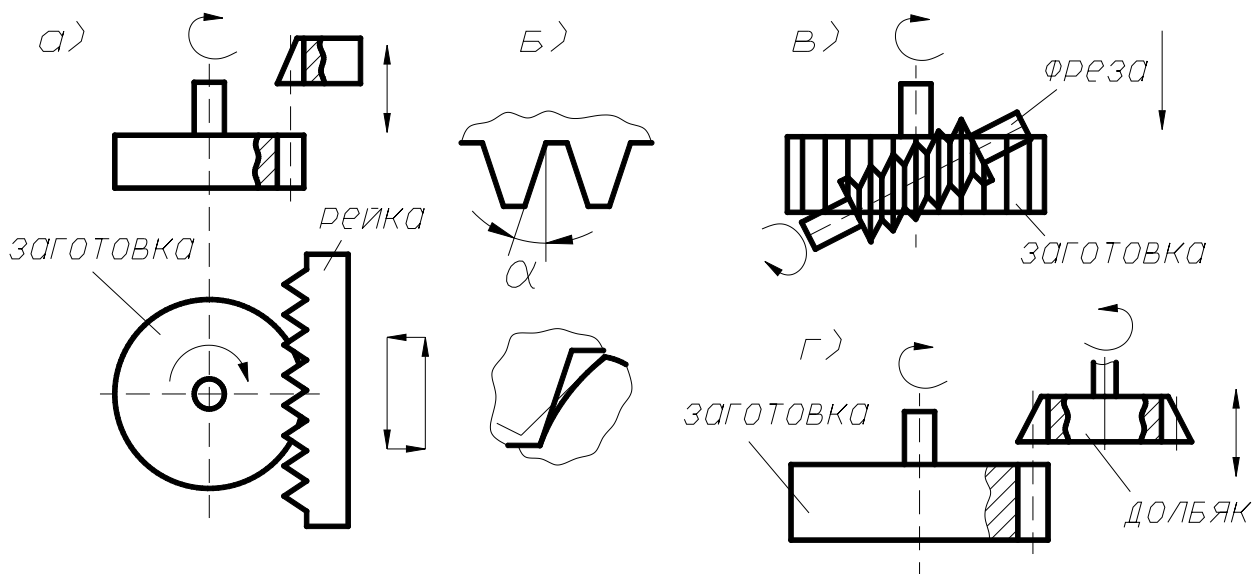


рис. 77

Все рассмотренные методы используются для нарезания цилиндрических колёс как с прямыми, так и с косыми зубьями.

### 8.10. Корректирование зубчатых колёс

При нарезании колёс режущий инструмент можно располагать ближе к заготовке или дальше от неё. Положение инструмента определяется расстоянием между делительной

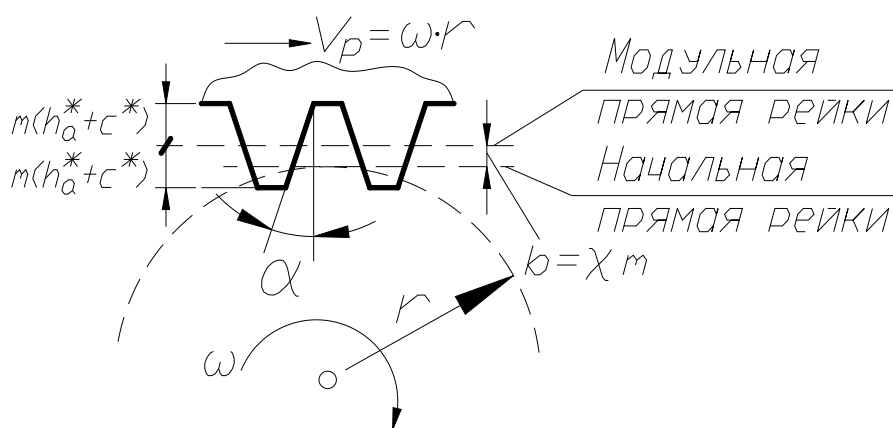


рис. 78

окружностью колеса и так называемой модульной прямой рейки, проходящей через середину высоты зуба режущего инструмента (рис.78). В зависимости от положения рейки по дели-

тельной окружности может перекачиваться без скольжения либо модульная прямая рейки, либо начальная прямая, отстоящая от модульной прямой на величину смещения “b”, которое называется *сдвигом* или *коррекцией*, а коэффициент  $\chi$  (хи), равный  $\chi = b/m$ , называется *коэффициентом смещения инструмента*. Если инструмент смещён от нарезаемого колеса, то  $\chi$  считается положительным (по-

ложительная коррекция), а если – к центру колеса, то  $\chi$  отрицателен (отрицательная коррекция). При  $\chi=0$  нарезаемое колесо называется *нормальным (нулевым)*. Толщина зуба и ширина впадины такого колеса по делительной окружности равны.

При положительной коррекции увеличивается прочность зуба, но уменьшается длина линии зацепления, а следовательно и коэффициент перекрытия  $\varepsilon_\alpha$ . При отрицательной коррекции – обратный эффект, т. е. увеличивается плавность и бесшумность работы передачи, но прочность зуба уменьшается.

Зацепление двух зубчатых колёс характеризуется суммарным коэффициентом коррекции  $\chi_\Sigma = \chi_1 + \chi_2$ , причём возможны три случая:

- 1)  $\chi_\Sigma = 0$  при  $\chi_1 = \chi_2 = 0$ , когда в зацеплении находятся два нулевых зубчатых колеса (нулевое зацепление);
- 2)  $\chi_\Sigma = 0$  при  $\chi_1 = -\chi_2$ , когда в зацеплении находятся два скорректированных зубчатых колеса, коэффициенты коррекции которых равны по величине и противоположны по знаку (равносмещённое зацепление с высотной коррекцией);
- 3)  $\chi_\Sigma \neq 0$ , когда в зацеплении находятся два скорректированных колеса, имеющих:
  - а)  $\chi_\Sigma > 0$  – положительное неравновсещённое зацепление с угловой коррекцией;
  - б)  $\chi_\Sigma < 0$  – отрицательное неравновсещённое зацепление с угловой коррекцией.

В первых двух случаях ( $\chi_\Sigma = 0$ ) делительные окружности совпадают с начальными, угол зацепления  $\alpha_w$  равен углу исходного контура рейки  $\alpha$  и межосевое расстояние равно  $a_w = 0,5 \cdot m \cdot (Z_1 + Z_2)$ , в отличие от неравновсещённого зацепления, где делительные и начальные окружности не совпадают,  $\alpha_w \neq \alpha$ , а межосевое расстояние равно:

$a_w = 0,5 \cdot m \cdot (Z_1 + Z_2) \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}$ , с учётом того, что

$$a_w = r_{w1} + r_{w2} \quad \text{при} \quad r_{w1} = \frac{r_{b1}}{\cos \alpha_w}; \quad r_{w2} = \frac{r_{b2}}{\cos \alpha_w} \quad \text{и}$$

$$r_{b1} = r_1 \cdot \cos \alpha = 0,5 \cdot m \cdot Z_1 \cdot \cos \alpha; \quad r_{b2} = r_2 \cdot \cos \alpha = 0,5 \cdot m \cdot Z_2 \cdot \cos \alpha.$$

## 8.11. Наименьшее число зубьев зубчатых колёс.

### Подрезание и заострение зубьев

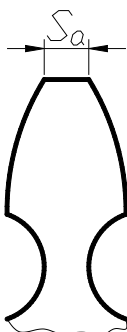


рис. 79

При нарезании нулевых колёс с малым числом зубьев может возникнуть явление врезания головок зубьев режущего инструмента в ножки зубьев колеса. Это явление называется *подрезанием зуба*. При этом уменьшается его прочность и увеличивается износ рабочей части зуба (рис. 79). Согласно свойствам эвольвентного зацепления точки контакта зубьев эвольвентного профиля совпадают с линией NP, начиная с точки N (рис. 80), то есть высота прямолинейной части головки зуба режущего

инструмента (рейки)  $h_a^* \cdot m$  должна быть меньше отрезка PF, иначе часть головки зуба рейки будет контактировать с заготовкой (нарезать её) не по эвольвенте.

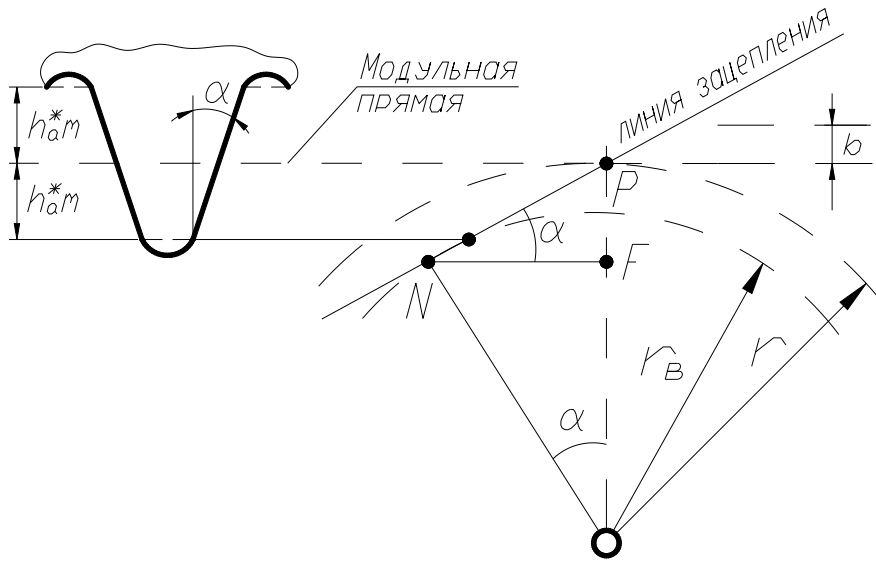


рис. 80

Так как  $h_a^* \cdot m \leq PF$ , а  $PF = r \cdot \sin^2 \alpha = 0,5 \cdot m \cdot Z \cdot \sin^2 \alpha$ , то

$$Z \geq \frac{2 \cdot h_a^*}{\sin^2 \alpha} \quad \text{и} \quad Z_{\min} = 17 \quad \text{при стандартных значениях } h_a^* = 1; \quad \alpha = 20^\circ.$$

Для исключения подреза при  $Z < Z_{\min}$  необходимо сместить инструмент от центра заготовки (положительная коррекция) так, чтобы

$$h_a^* \cdot m - b \leq 0,5 \cdot m \cdot Z \cdot \sin^2 \alpha, \quad \text{т. е.} \quad b = m \cdot \chi \geq h_a^* \cdot m - 0,5 \cdot m \cdot Z \cdot \sin^2 \alpha$$

или с учётом того, что  $\sin^2 \alpha = \frac{2 \cdot h_a^*}{Z_{\min}}$ , получим при  $h_a^* = 1$  коэффициент коррек-

ции  $\chi_{\min} = \frac{Z_{\min} - Z}{Z_{\min}}$ . Эта величина  $\chi$  определяет нижний предел коэффициента

коррекции.

Если увеличивать коэффициент  $\chi$ , то толщина зуба  $S_a$  у вершины (рис. 79) будет уменьшаться и при некотором  $\chi_{\max}$  наступит заострение зуба ( $S_a = 0$ ). Опасность заострения наиболее велика у колёс с малым числом зубьев ( $Z < 15$ ). Для предотвращения разрушения заострённого зуба коэффициент смещения  $\chi$  назначают с расчётом, чтобы  $S_a \geq 0,2m$ .

## 8.12. Выбор расчётных коэффициентов смещения для передач внешнего зацепления

При назначении коэффициентов смещения  $\chi_1$  и  $\chi_2$  для любой передачи должны выполняться три условия:

- 1) отсутствие подрезания;
- 2) отсутствие заострения;
- 3) непрерывность зацепления.

Первое условие выполняется при  $\chi_i \geq \chi_{\min_i}$  ( $\chi_{\min_i}$  определяются из условия отсутствия подреза). Второе и третье условия выполняются при ограничении верхних пределов  $\chi_i$  величинами  $\chi_{\max_i}$  с учётом возможности заострения зубьев и уменьшения коэффициента перекрытия  $\varepsilon_\alpha$  до величины  $\varepsilon_\alpha < 1$ . То есть при выборе  $\chi_i$  необходимо чтобы  $\chi_{\min_i} \leq \chi_i \leq \chi_{\max_i}$ , где  $\chi_{\max_i}$  для каждого из колёс берётся наименьшим из значений, учитывающих заострение зуба и снижения  $\varepsilon_\alpha$  до величины  $\varepsilon_\alpha < 1$ .

Внутри указанных диапазонов  $\chi$  назначаются так, чтобы по возможности улучшить качественные показатели передачи (прочность, износостойкость, плавность хода).

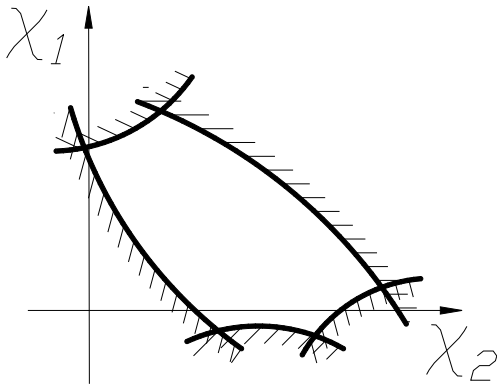


рис. 81

Для передачи можно построить область допустимых значений коэффициентов смещения в координатах  $\chi_1$  и  $\chi_2$ , которая называется *блокирующим контуром*. Допустимые значения  $\chi_1$  и  $\chi_2$  расположены внутри контура (рис. 81). Для каждой передачи можно построить свой контур. Такие блокирующие контуры для различных передач имеются в справочной литературе.

## 8.13. Цилиндрические колёса с косыми зубьями и их особенности

Образование косозубого колеса можно представить, если взять цилиндрическое прямозубое колесо и сообщить ему крутильную деформацию. При этом угол скручивания, образованный осью колеса и винтовой линией, является углом наклона винтовой линии  $\beta^\circ$ .

Цилиндрические колёса с косыми зубьями применяются при передаче вращения между параллельными и перекрещивающимися осями. В передаче с параллельными осями углы  $\beta^\circ$  обоих колёс равны по величине и противоположны по направлению при внешнем зацеплении и одинаковы по направлению при внутреннем зацеплении. Угол  $\beta^\circ$  (рис. 82, а) называется *углом наклона зубьев по делительному цилиндру радиуса  $r$* . С другими соосными цилиндрами, начальным ( $r_w$ ) и основным ( $r_b$ ) винтовая поверхность зуба образует, соответственно, углы  $\beta_w^\circ$  и  $\beta_b^\circ$  (рис. 82, а). Шаг винтовой линии равен:

$$p = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \operatorname{ctg} \beta^\circ = 2 \cdot \pi \cdot r_w \cdot \operatorname{ctg} \beta_w^\circ = 2 \cdot \pi \cdot r_b \cdot \operatorname{ctg} \beta_b^\circ.$$

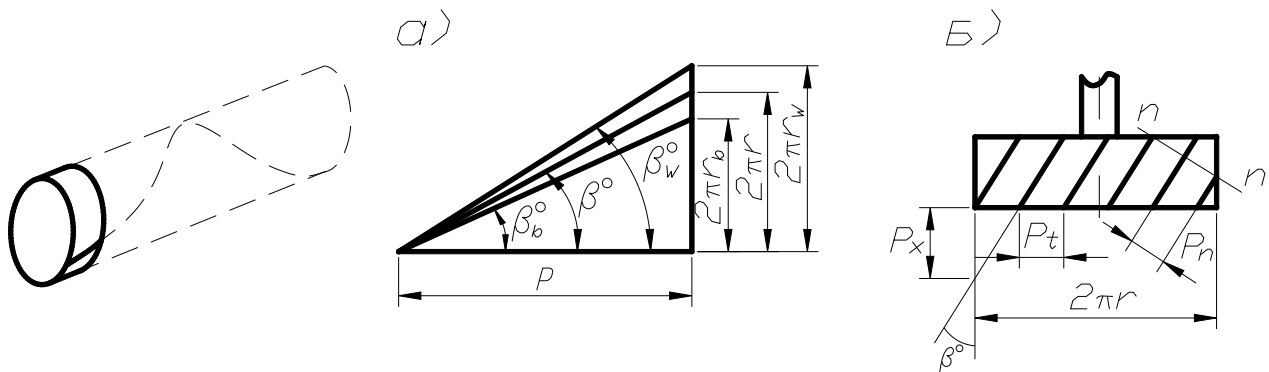


рис. 82

В косозубом колесе различают торцовый  $m_t$ , нормальный  $m_n$  и осевой  $m_x$  модули, причём стандартное значение имеет нормальный модуль  $m_n$ , соответствующий размерам зуба, замеренным по нормали  $nn$  к его оси (рис. 82, б), что объясняется установкой режущего инструмента. Аналогично различают торцовый  $p_t$ , нормальный  $p_n$  и осевой  $p_x$  шаг (рис. 82, б), связь между которыми определяется формулами:

$$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta^\circ} = \frac{m_x}{\operatorname{ctg} \beta^\circ}; \quad p_t = \frac{p_n}{\cos \beta^\circ} = \frac{p_x}{\operatorname{ctg} \beta^\circ}.$$

Большим достоинством зацеплений с косыми зубьями является возможность получения малогабаритных передач. Так, если для прямозубого колеса  $Z_{\min} = 17$ , то для косозубого  $Z_{\min} = 17 \cdot \cos^3 \beta^\circ$ . В экспериментальных конструкциях  $Z_{\min}$  доводят до трёх и менее зубьев. Кроме того, увеличивается коэффициент перекрытия, доходя до 10 и выше, что также повышает нагрузочную способность и позволяет уменьшить габариты передачи. *Недостатком* является возникновение дополнительных осевых усилий, нагружающих подшипники. Этот недостаток устраняется в шевронных передачах.

## 8.14. Конические зубчатые передачи

Конические передачи являются передачами с пересекающимися осями вращения звеньев. Применяются, главным образом, передачи с углом между осями  $\delta = 90^\circ$ . Основные параметры аналогичны параметрам цилиндрических колёс (рис. 83), причём делительной окружностью стандартного модуля  $m$  является внешняя делительная окружность конического колеса диаметром  $d$  (рис. 83). Через модуль выражаются все остальные размеры. Для расчёта зубьев на изгиб используется величина среднего модуля, замеренного в середине ширины “ $\delta$ ”

зубчатого венца. Передаточное отношение равно: 
$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}.$$

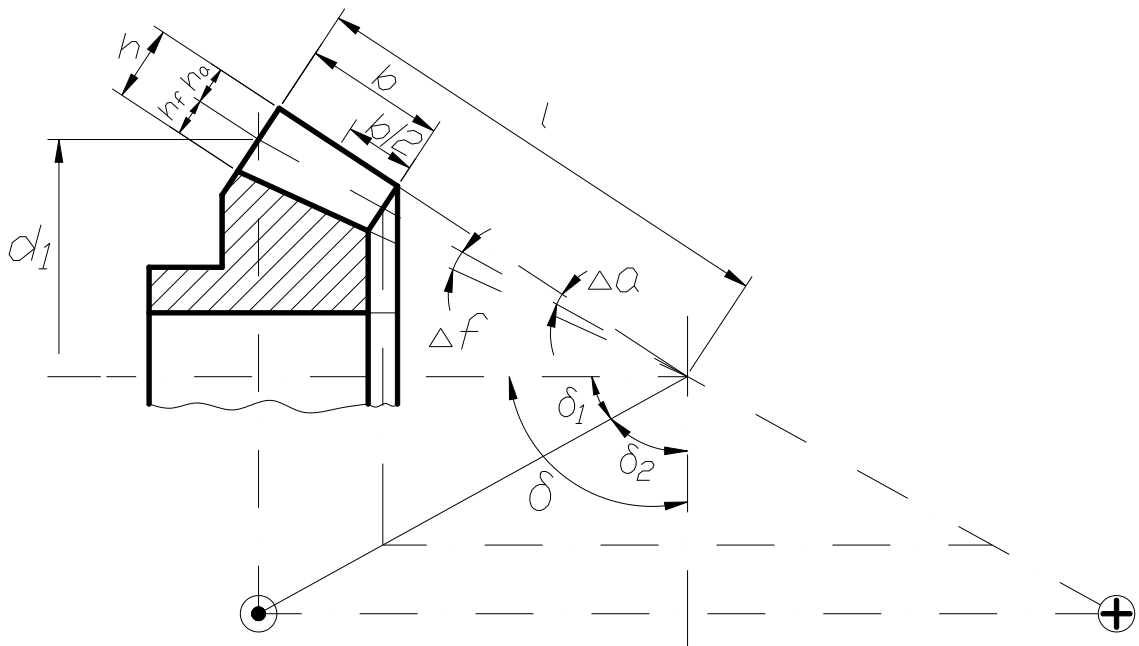


рис. 83

В конических передачах  $i(u)$  не имеет знака, а для определения направления вращения изображают векторы абсолютных скоростей точек на начальных конусах в виде кружка с точкой (на зрителя) и крестиком (от зрителя), как показано на рис. 83.

## 8.15. Червячные передачи

Червячные передачи являются передачами со скрещивающимися осями. Угол осей обычно равен  $90^\circ$ . Принцип их действия аналогичен передаче винт-гайка.

Червяки подразделяются по числу заходов (винтовых линий) на одно и многозаходные число заходов  $Z_1$  совпадает с числом зубьев. Винтовая линия на

червяке характеризуется ходом винтовой линии  $h = 2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot \operatorname{tg} \lambda$ , где  $r_1$  – радиус делительной окружности;  $\lambda$  – угол подъема винтовой линии по делительной окружности (рис. 84, а). Расстояние между двумя соседними витками называется *шагом*  $p$ , причём  $h = Z_1 \cdot p$ .

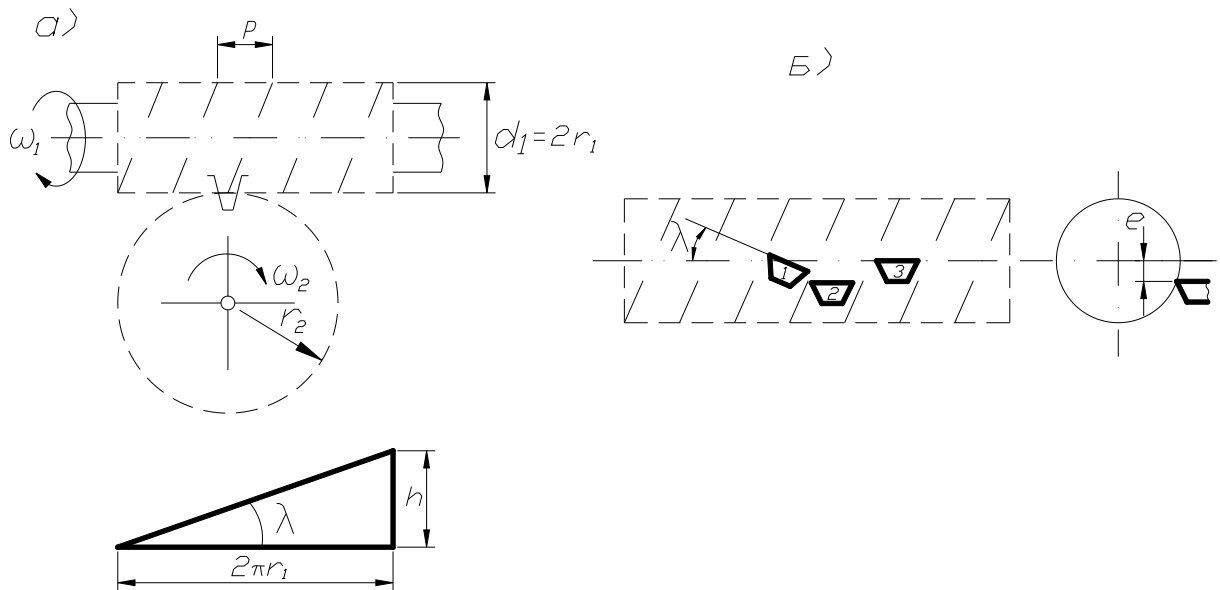


рис. 84

За основной параметр червячного зацепления принимается осевой модуль червяка  $m_s$ , равный торцевому модулю червячного колеса. Кроме того, стандартным параметром является относительный диаметр червяка  $q = \frac{d_1}{m_s}$ .

По форме боковой поверхности резьбы различают конволютный, эвольвентный и архимедов червяки, образуемые при расположении резца трапециевидной формы как указано на рис. 84, б с режущей кромкой под углом  $\lambda$  наклона винтовой линии (1) или при  $\lambda=0$  и смещении  $e \neq 0$  (2), а также при  $e=0$  (3). Наименования червяков соответствуют наименованиям кривых, по которым очерчены зубья червяка в сечении, перпендикулярном его оси.

### 8.16. Кинематический анализ и классификация фрикционных и зубчатых механизмов

В практике машиностроения чаще возникает необходимость понижения, реже повышения скорости при передаче движения от входного звена к выходному.

Механизмы для передачи вращения, в которых происходит понижение скорости вращения, называются *редукторами*, а механизмы, повышающие эту скорость, называются *мультипликаторами*.

По кинематическому признаку различают:

- механизмы с неподвижными геометрическими осями всех колёс (рядовые);
- механизмы с подвижными геометрическими осями некоторых колёс (эпиклические), которые обладают одной степенью свободы (планетарные) или двумя и более (дифференциальные).

Кроме того, различают одно и многоступенчатые механизмы, которые состоят из одной или двух и более пар колёс соединённых последовательно (рис. 85, а), параллельно (рис. 85, б), или смешанно.

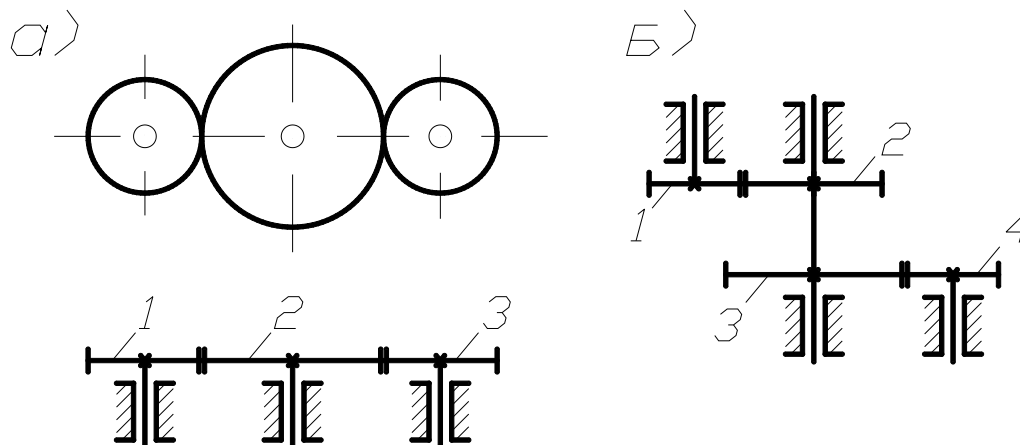


рис. 85

При проектировании механизмов для передачи вращения с заданным значением передаточных отношений и крутящего момента стремятся обеспечить высокий коэффициент полезного действия (кпд), минимальные габариты и вес.

Передаточное отношение одноступенчатого редуктора (при отсутствии скольжения) равно  $i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_{W2}}{r_{W1}} = \pm \frac{Z_2}{Z_1}$ , т.е. отношению радиусов начальных окружностей или отношению чисел зубьев (для зубчатых колёс).

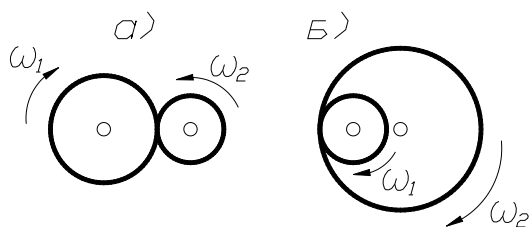


рис. 86

Передаточное отношение берётся со знаком (+), если соприкасающиеся колёса вращаются в одну сторону, и со знаком (-), если – в разные стороны. Обычно знак (+) передаточное отношение имеет при внутреннем касании колёс (рис. 86, б), а знак (-) – при внешнем касании (рис. 86, а). В случае многоступенчатого механизма с параллельным соединением колёс (рис. 85, б) по-

лучим  $i_{1,4} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4}$  или  $i_{1,4} = \left(-\frac{r_2}{r_1}\right) \cdot \left(-\frac{r_4}{r_3}\right) = i_{1,2} \cdot i_{3,4}$ .



При последовательном соединении колёс (рис. 85, а)

$$i_{1,3} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} = \left(-\frac{r_2}{r_1}\right) \cdot \left(-\frac{r_3}{r_2}\right) = \frac{r_3}{r_1}.$$

Таким образом, общее передаточное отношение многоступенчатого механизма равно произведению частных передаточных отношений отдельных ступеней, то есть  $i_{1,k} = i_{1,2} \cdot i_{2,3} \cdot \dots \cdot i_{k-1,k}$ .

Причём промежуточные колёса в механизме с последовательным соединением не влияют на величину передаточного отношения, а служат лишь для изменения направления вращения. Эти промежуточные колёса называются *паразитными*.

Для кинематического анализа механизмов можно использовать графо-численный метод, наглядно иллюстрирующий характер распределения линейных скоростей звеньев механизма. Метод основан на использовании линейной зависимости скорости  $V$  от радиуса, т.е.  $V = \omega \cdot r$ .

При построении картины, иллюстрирующей характер распределения линейных скоростей, сначала откладываются в выбранном масштабе  $\mu_V$  известные вектора линейных скоростей точек, закон движения которых задан (рис. 87).

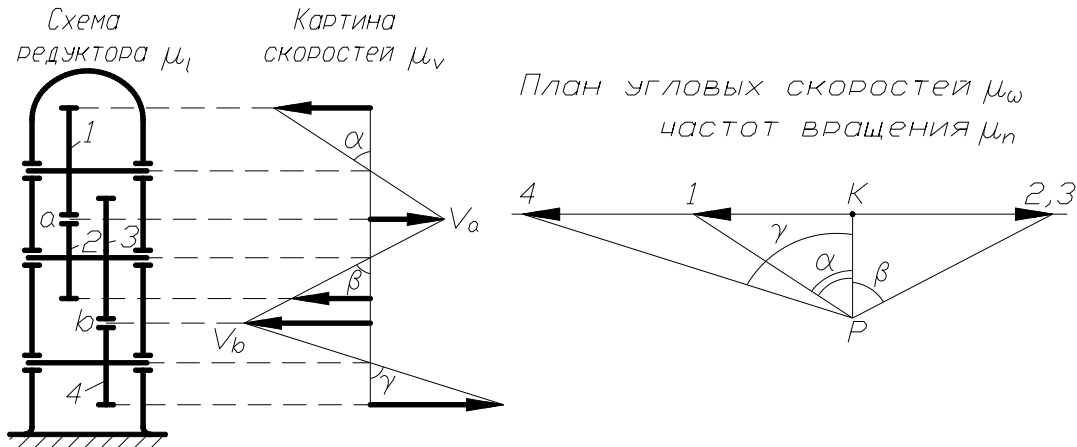


рис. 87

Затем, проводя отрезки через концы векторов известных скоростей, получим общую картину скоростей.

Для определения угловых скоростей (частот вращения) всех звеньев удобно использовать план угловых скоростей (частот вращения), где отрезки  $\overline{K1}$ ,  $\overline{K2}$ , ... соответствуют угловым скоростям (частотам вращения) колёс 1, 2, ... (рис. 87). При этом схема редуктора вычерчивается в масштабе  $\mu_l$ , а так как от-

резки  $\overline{K1}$ ,  $\overline{K2}$ , ... пропорциональны  $tg\alpha$ ,  $tg\beta, \dots$ , то  $tg\alpha = \frac{V}{r} = \omega$ . Выбор полюсно-го расстояния  $\overline{pk}$  может быть произвольным.

### 8.16.1. Кинематический анализ эпициклических механизмов

Простейший эпициклический механизм (редуктор Джемса) состоит из центральных колёс 1 и 3 (рис. 88), сателлитного колеса 2 и водила Н. Если одно из центральных колёс, например, колесо 3 остановить с помощью тормоза Т, то эпициклический механизм превращается в планетарный, где при вращении колеса 1 колесо 2 обегает неподвижное колесо 3, вращая водило Н с угловой скоростью  $\omega_H$ . Степень подвижности такого редуктора равна единице.

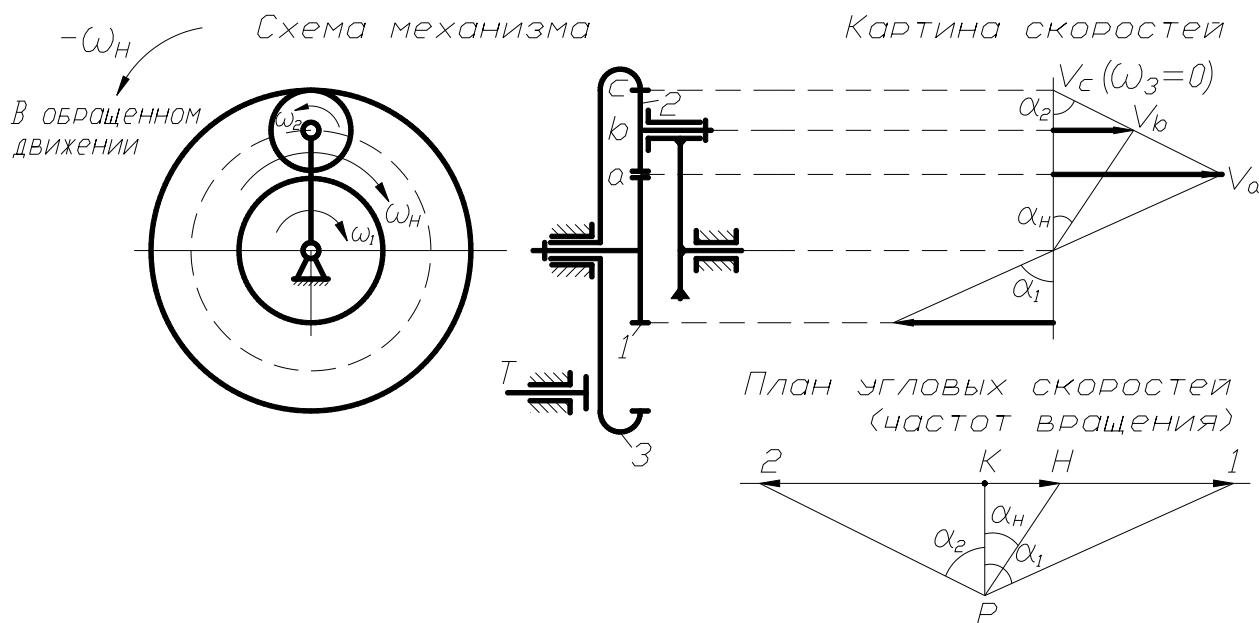


рис. 88

Для планетарного механизма можно построить картину скоростей и план угловых скоростей (частот вращения), используя рассмотренные выше приёмы (рис. 88). План угловых скоростей можно использовать для приближённого определения передаточного числа планетарного механизма, которое равно

$$i_{1,H} = \overline{K1} / \overline{KH}.$$

Аналитически передаточное число определяется с использованием метода обращения движения, когда механизму в целом сообщается вращение с угловой скоростью обратной скорости водила ( $-\omega_H$ ). При этом относительное движение звеньев не изменится, а водило Н в обращённом движении будет оставаться неподвижным и планетарный редуктор превращается в рядовой (с неподвижными

осями). Если обозначить угловые скорости звеньев в обращённом движении с индексом в круглых скобках указывающим неподвижное звено, то

$$i_{1,3}^{(H)} = \frac{\omega_1^{(H)}}{\omega_3^{(H)}} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = -\frac{\omega_1}{\omega_3} + 1 = -i_{1H} + 1.$$

С другой стороны  $i_{1,3}^{(H)} = -\frac{Z_3}{Z_1}$ , т.е.  $i_{1H} = 1 - i_{1,3}^{(H)} = 1 + \frac{Z_3}{Z_1}$ .

Если в эпициклическом механизме (рис. 88) оба центральных колеса совершают вращение, то степень подвижности такого механизма будет равна двум и он превращается в дифференциальный. Такие механизмы служат:

- 1) для привода одного рабочего органа от двух или более двигателей (т.е. для сложения движения нескольких ведущих звеньев);
- 2) для разложения движения одного вала на два и более независимых движений ведомых валов.

Определение угловых скоростей звеньев можно производить, пользуясь формулой Виллиса, которая позволяет получить любую неизвестную угловую скорость при заданных остальных скоростях. Эта формула записывается аналогично выведенной ранее для планетарного механизма, т.е.

$$i_{1,3}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}.$$

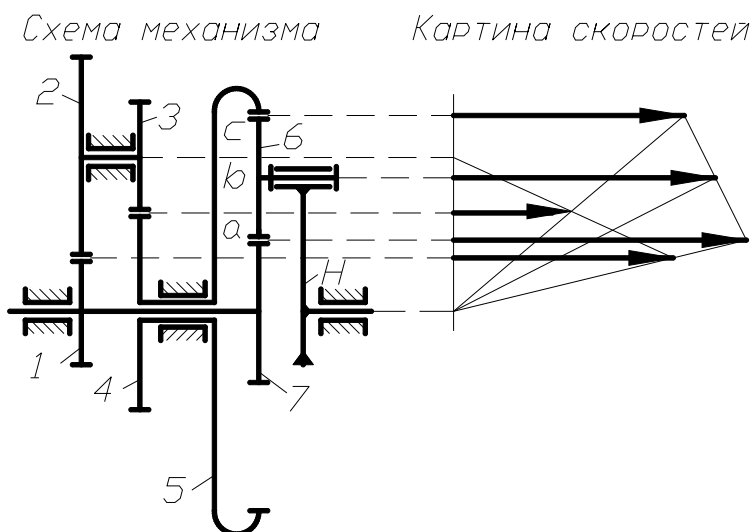


рис.89

Одним из распространённых типов дифференциальных механизмов являются так называемые замкнутые, в которых благодаря дополнительной зубчатой передаче связаны оба центральных колеса (рис. 89). Это позволяет использовать один двигатель для привода механизма. Для определения передаточного отношения используем формулу

Виллиса  $i_{7,5}^{(H)} = \frac{\omega_7 - \omega_H}{\omega_5 - \omega_H}.$

Так как  $i_{7,5}^{(H)} = -\frac{Z_5}{Z_7}$ , то  $-\frac{Z_5}{Z_7} = \frac{i_{1,H} - 1}{\omega_5 - \omega_H}$ , где

$$\frac{\omega_5}{\omega_H} = \frac{\omega_5}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_H} = \left(-\frac{Z_3}{Z_4}\right) \cdot \left(-\frac{Z_1}{Z_2}\right) \cdot i_{1,H}, \text{ т.е. } \left(1 - i_{1,H} \cdot \frac{Z_3 \cdot Z_1}{Z_4 \cdot Z_2}\right) \cdot \frac{Z_5}{Z_7} = i_{1,H} - 1.$$

$$\text{Отсюда } i_{1,H} = \frac{1 + \frac{Z_5}{Z_7}}{1 + \frac{Z_1 \cdot Z_3 \cdot Z_5}{Z_2 \cdot Z_4 \cdot Z_7}}.$$

### 8.16.2. Эпициклические механизмы с коническими колёсами

Примером дифференциального механизма с коническими колёсами является дифференциал автомобиля (рис. 90). Согласно формуле Виллиса

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_2 - \omega_H} = -\frac{Z_2}{Z_1}.$$

При  $Z_2 = Z_1$  получим

$$\omega_H = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2},$$

т.е. при постоянной скорости вращения карданного вала и скорости автомобиля в целом полуоси могут вращаться с различными

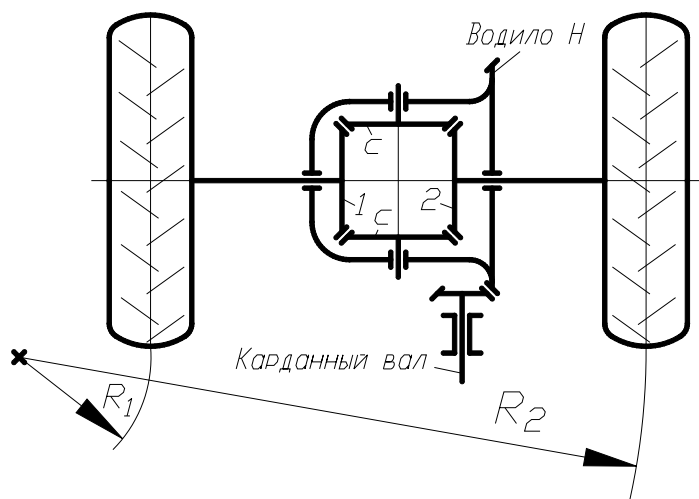


рис. 90

или с одинаковыми скоростями.

Например, на повороте скорости вращения полуосей пропорциональны радиусам поворота  $R_1$  и  $R_2$ , а при ровной прямой дороге скорость полуосей одинакова и равна  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_H$ .

### 8.17. Некоторые вопросы синтеза зубчатых механизмов

Комплексные задачи синтеза зубчатых механизмов настолько сложны, что в полной постановке с учётом факторов кинематики и динамики они не решены до настоящего времени. Известны решения частных задач как геометрического, так и динамического синтеза зубчатых механизмов, причём эти решения часто носят характер рекомендаций по выбору параметров. Например, выбор передаточных отношений каждой ступени в многоступенчатом зубчатом механизме, где требуемое общее передаточное отношение равно

$$i_{1,k} = i_{1,2} \cdot i_{2,3} \cdot \dots \cdot i_{k-1,k}$$

рекомендуется осуществлять так, чтобы  $i_{1,2} > i_{2,3} > \dots > i_{k-1,k}$ . Это связано с возрастанием нагрузки по мере уменьшения угловой скорости. Указанное распределение передаточных отношений позволяет более равномерно распределить эту нагрузку между зубчатыми колёсами.

При заданных передаточных отношениях и известном числе зубьев колёс задача синтеза сводится к определению их параметров. При этом сначала выбирается материал колёс с учётом назначения передачи, условий работы и других факторов, затем определяется модуль передачи, позволяющий обеспечить изгибную и контактную прочность зубьев, а затем – все геометрические параметры зубчатых колёс.

Известны решения частных задач подбора чисел зубьев сложных зубчатых механизмов с учётом различных условий, например, геометрического характера.

### 8.17.1. Синтез эпициклических механизмов с цилиндрическими колёсами. Условия синтеза

При проектировании планетарного редуктора с заданным передаточным отношением возникает задача определения чисел зубьев при соблюдении следующих условий:

- 1) кинематическое условие;
- 2) условие соосности;
- 3) условие соседства;
- 4) условие сборки;
- 5) условие правильного зацепления.

Физический и математический смысл этих условий разберём на конкретной схеме планетарного механизма с нулевыми эвольвентными цилиндрическими колёсами (рис. 91).

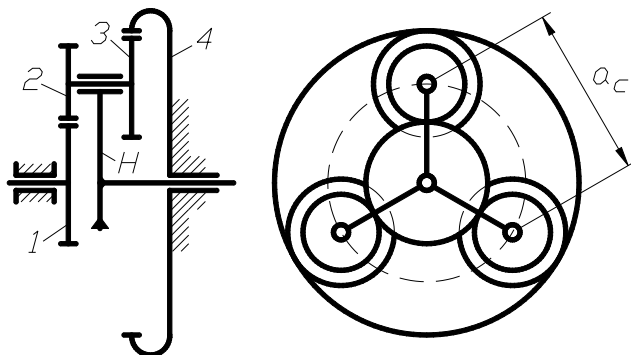


рис. 91

Кинематическое условие обеспечивает заданное передаточное отношение и для данного механизма имеет следующий вид:

$$i_{1,4}^{(H)} = -\frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{Z_4}{Z_3} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_4 - \omega_H}$$

или при  $\omega_4 = 0$  получим

$$i_{1,H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{Z_4}{Z_3} \quad (a).$$

Обычно допускается отклонение передаточного отношения в пределах 5% от заданного.

*Условие соосности* требует, чтобы оси колёс 1 и 4, в данном случае, совпадали для обеспечения зацепления сателлитов с центральными колёсами. Для этого необходимо, чтобы выполнялось соотношение радиусов делительных окружностей

$$r_1 + r_2 = r_4 - r_3,$$

а при одинаковых модулях всех колёс:  $Z_1 + Z_2 = Z_4 - Z_3$  (б).

*Условие соседства* включает требование совместного размещения нескольких сателлитов по общей окружности так, чтобы они не задевали друг друга своими зубьями. Необходимость выполнения этого условия возникает при числе сателлитов  $k > 2$  (увеличение числа сателлитов уменьшает нагрузку на зубья). В этом случае необходимо, чтобы  $a_c > 2 \cdot r_a^c$  ( $r_a^c$  - радиус окружности вершин наибольшего сателлита). Так как

$$a_c = 2 \cdot (r_1 + r_2) \cdot \sin \frac{2\pi}{2k} = m \cdot (Z_1 + Z_2) \cdot \sin \frac{\pi}{k};$$

$$r_a^c = r^c + h_a \cdot m = m \cdot \left( \frac{Z^c}{2} + 1 \right),$$

$$\text{то } \sin \frac{\pi}{k} > \frac{Z^c + 2}{Z_1 + Z_2}, \quad (\text{в})$$

где  $Z^c$  - число зубьев наибольшего сателлита (2 или 3).

*Условие сборки* учитывает необходимость одновременного зацепления всех сателлитов с центральными колёсами, т.е. установив первый сателлит и повернув водило на угол  $\frac{2\pi}{k}$  рад., необходимо в то же самое место установить следующий сателлит. Это может быть осуществлено, если зубья колёс второго блока сателлитов окажутся точно против впадин зубьев центральных колёс. Иначе сборку осуществить невозможно. Для формирования условия примем, что оба колеса всех  $k$  блоков сателлитов имеют одинаковую ориентацию зубьев друг относительно друга. После установки первого сателлита на ось водило должно

быть повернуто на угол  $\frac{2\pi}{k}$  рад., при этом колесо 1 необходимо повернуть на угол  $\varphi_1 = i_{1,H} \cdot \frac{2\pi}{k}$  рад. С другой стороны угол поворота колеса 1 ( $\varphi_1$ ) должен быть кратным его угловому шагу зубьев  $\frac{2\pi}{Z_1}$ , в противном случае при повороте

на угол  $\varphi_1$  положение зубьев колеса 1 изменится и второй сателлит вставить будет невозможно. Таким образом  $\varphi_1 = q \cdot \frac{2\pi}{Z_1}$  ( $q$  – целое число) и

$$q \cdot \frac{2\pi}{Z_1} = i_{1,H} \cdot \frac{2\pi}{k} \quad \text{или} \quad q = i_{1,H} \cdot \frac{Z_1}{k} \quad (z)$$

Условие правильного зацепления включает условие отсутствия подреза у колёс с внешним зубчатым венцом и условие отсутствия заедания (интерференции) во внутреннем зацеплении. Эти условия имеют вид:

$$Z_i \geq Z_{\min_i} \quad (d)$$

значение  $Z_{\min}$  можно принять равным:

$Z_{\min} = 17$  - для колёс с внешним зацеплением;

$Z_{\min} = \begin{cases} 20 \\ 85 \end{cases}$  - для колёс с внутренним зацеплением.

### 8.17.2. Методы синтеза эпициклических механизмов

Задача подбора чисел зубьев колёс для эпициклического механизма в общей постановке является оптимизационной ввиду множества возможных решений. Её можно считать типичной задачей дискретного нелинейного программирования, если за критерий оптимальности принять габариты или вес механизма, а ограничения на целочисленные параметры  $Z_1, Z_2, \dots$  будут условия (а-д). Такую задачу можно решать различными методами, например, численными методами направленного перебора, когда варьируются  $Z_1, Z_2, \dots$  с целью минимизации габаритов или веса при соблюдении ограничений. Такая задача может быть решена с помощью ЭВМ.

Применяются упрощённые методы, позволяющие найти одно из конструктивно допустимых решений. Один из таких методов – метод сомножителей.

Представим числа зубьев в виде нескольких сомножителей:

$$Z_1 = \alpha \cdot A \cdot t; \quad Z_2 = \alpha \cdot B \cdot t; \quad Z_3 = \beta \cdot C \cdot t; \quad Z_4 = \beta \cdot D \cdot t.$$

Из условия (б)  $\alpha \cdot (A + B) = \beta \cdot (D - C)$ . Это уравнение превращается в тождество при:  $\alpha = D - C$ ;  $\beta = A + B$ .

Тогда:  $Z_1 = t \cdot A \cdot (D - C)$ ;  $Z_2 = t \cdot B \cdot (D - C)$ ;

$$Z_3 = t \cdot C \cdot (A + B); \quad Z_4 = t \cdot D \cdot (A + B).$$

Подставив эти выражения в условие (а), получим:  $\frac{B}{A} \cdot \frac{D}{C} = i_{1,H} - 1$ .

Таким образом, величину  $(i_{1,H} - 1)$  можно представить в виде нескольких сомножителей (A, B, C, D). Далее определяются значения  $t$ , обеспечивающие выполнение условий сборки и правильного зацепления и выбирается одно из этих значений. Например, из условия сборки ( $z$ )

$$q = t \cdot \frac{A \cdot (D - C) \cdot i_{1,H}}{k}$$

выбираются значения  $t$ , обеспечивающие целочисленность  $q$ . После этого можно определить числа зубьев.

*Пример:*  $i_{1,H} = 15$ ;  $k = 3$ .

Представим  $\frac{B}{A} \cdot \frac{D}{C} = i_{1,H} - 1 = 15 - 1 = 14 = \frac{2 \cdot 7}{1 \cdot 1}$ , т.е. A=1; B=2; C=1; D=7. Тогда

$$q = t \cdot \frac{A \cdot (D - C) \cdot i_{1,H}}{k} = t \cdot \frac{1 \cdot (7 - 1) \cdot 15}{3} = 30 \cdot t,$$

следовательно условие сборки выполняется при  $t = 1, 2, \dots$ . Так как при  $t = 1$ :

$$Z_1 = 1 \cdot 1 \cdot (7 - 1) = 6; \quad Z_2 = 1 \cdot 2 \cdot (7 - 1) = 12; \quad Z_3 = 1 \cdot 1 \cdot (1 + 2) = 3; \quad Z_4 = 1 \cdot 7 \cdot (1 + 2) = 21,$$

то с учётом условий правильного зацепления, когда  $Z_{\min_3} = 20$ , принимаем  $t = 7$ .

$$\text{Тогда } Z_1 = 42; \quad Z_2 = 84; \quad Z_3 = 21; \quad Z_4 = 147.$$

## 9. Трение в кинематических парах

### 9.1. Виды трения

Когда одно тело соприкасается с другим, то независимо от их физического состояния (твёрдое, жидкое, газообразное) возникает явление, называемое *трением*. В зависимости от характера относительного движения тел различают *трение скольжения* и *трение качения*. Сила, препятствующая относительному движению контактирующих тел, называется *силой трения*. Вектор этой силы лежит в плоскости, касательной к поверхности тел в зоне их контакта.

Сила трения скольжения уменьшается, если соприкасающиеся тела смазаны специальными смазочными материалами, причём, если материал – жидкость, полностью разделяющая контактирующие поверхности, то трение называется *жидкостным*. При совершенном отсутствии смазки имеет место *сухое трение*. Если смазывающая жидкость не полностью разделяет трущиеся поверхности, то трение называется *полужидкостным* или *полусухим* в зависимости от того, какой из двух видов трения преобладает.

Применяемые смазки делятся на несколько видов: *твёрдые*, *жидкие*, *газовые*; при этом смазка может быть: *гидро-* или *газостатической*, когда она поступает под давлением в зазор между трущимися телами, а также *гидро-* или *газодинамической*, когда она разделяет трущиеся поверхности в результате давления, самовозникающего в слое жидкости при относительном движении тел.



Сцепление и трение широко используется в современной технике. Благодаря сцеплению движутся различные транспортные средства. Принцип действия фрикционной, ременной и других передач основан на использовании трения. Распространение получила сварка трением. Вместе с тем трение отрицательно сказывается там, где оно вызывает потери энергии

## 9.2. Трение скольжения в поступательных парах

Сила трения на поверхности соприкосновения двух звеньев направлена в сторону, противоположную скорости относительного движения и приближённо может быть определена по формуле Кулона

$$F^{mp} = f \cdot F^n,$$

где  $F^n$  – сила реакции, нормальная к поверхности контакта;  $f$  - коэффициент трения скольжения (величина, постоянная в определённом диапазоне скоростей и удельных давлений).

Коэффициент трения зависит от многих факторов (чистоты поверхности, наличия и качества смазки, материала тел и др.) и определяется экспериментально.

Сила трения покоя (сила сцепления), т.е. сила, которую надо преодолеть, чтобы тело привести в движение обычно больше силы трения скольжения, поэтому различают коэффициент сцепления  $f_0$  и коэффициент трения скольжения  $f$ .

Сила трения возникает как результат действия внешних сил  $F$ , поэтому она является реактивной силой, в результате действия которой суммарная реакция  $F^\Sigma$  отклоняется на угол  $\rho$  от нормали к трущимся поверхностям (рис. 92, а).

При этом  $f = \frac{F^{mp}}{F^n} = \operatorname{tg} \rho$ . Угол  $\rho$  называется *углом трения скольжения*.

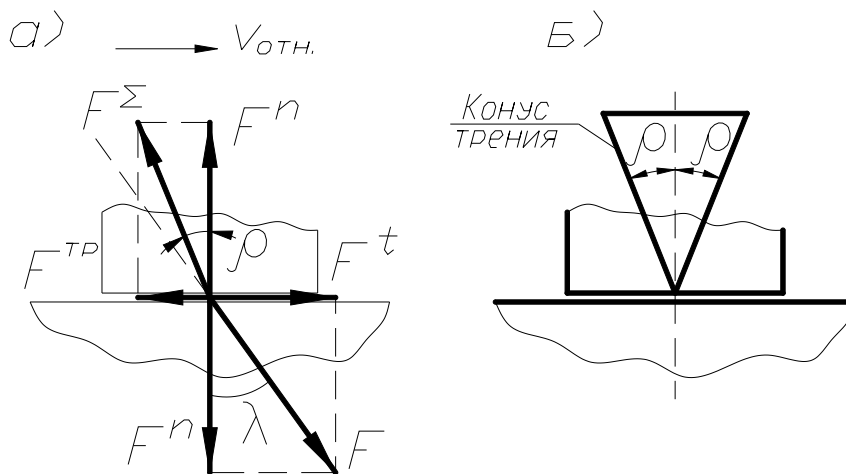


рис. 92

Если построить конус с углом при вершине  $2 \cdot \rho$  (рис. 92, б), то получим конус трения. Движение возможно при  $F^t \geq F^{mp}$  или при

$$F^n \cdot \operatorname{tg} \lambda \geq F^n \cdot \operatorname{tg} \rho,$$

т.е. при  $\lambda \geq \rho$ , причём, если  $\lambda = \rho$ , то движение происходит с  $V = \text{const}$ .

В общем случае движение возможно, если сила внешнего воздействия  $F$  находится за пределами конуса трения.

Мощность, затрачиваемая на трение скольжения равна:

$$P^{mp} = F^{mp} \cdot V_{отн.} = F^n \cdot f \cdot (V_1 \pm V_2),$$

где знак зависит от направления скоростей.

### 9.3. Трение скольжения во вращательных парах

Вращательные кинематические пары, образуемые цапфами валов и их опорами, широко распространены в машиностроении. Цапфами называются части валов и осей, посредством которых они опираются на подшипники. Трение цапф в подшипниках удобно оценивать величиной момента сил трения скольжения относительно оси вращения (рис. 93):

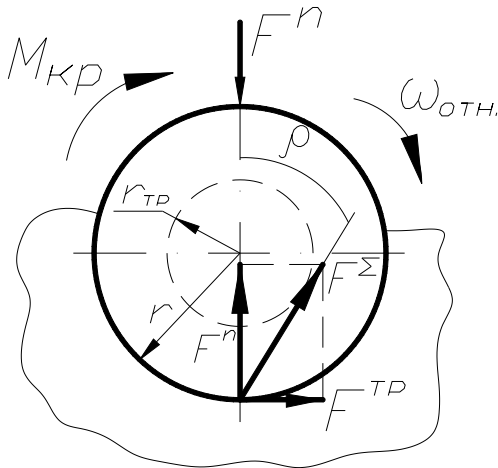


рис. 93

$$M^{mp} = F^{mp} \cdot r = F^n \cdot f \cdot r = F^{\Sigma} \cdot r_{mp},$$

где  $F^{\Sigma}$  – полная реакция;

$r_{mp}$  – радиус круга трения, равный:

$$r_{mp} = r \cdot \sin \rho \approx r \cdot \operatorname{tg} \rho \approx r \cdot f.$$

Мощность, затрачиваемая на трение, равна:

$$P^{mp} = M^{mp} \cdot \omega_{отн.} = M^{mp} \cdot (\omega_1 \pm \omega_2).$$

### 9.4. Трение качения

В случаях идеально твёрдых тел, одно из которых катится по поверхности другого, соприкосновение их происходит по линии или в точке и сопротивление качению отсутствует, так как линии действия сил  $F^n$  совпадают (рис. 94, а) и сумма моментов относительно точки А равна  $\sum M_A = F \cdot h$ . В действительности соприкосновение происходит не по линии, а по поверхности вследствие деформаций (рис. 94, б) и сумма моментов ( $\sum M_A$ ) равна:

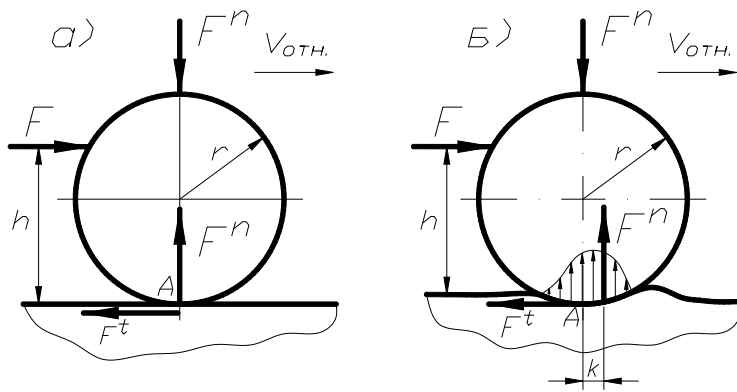


рис. 94

$$\Sigma M_A = F \cdot h - F^n \cdot k.$$

При  $V_{отн.} = const$  и  $F^t = F$

получим  $F \cdot h - F^n \cdot k = 0$ , т.е.

$$k = h \cdot \frac{F}{F^n} - \text{коэффициент трения качения, измеряемый в единицах длины. Часто используется величина } f_k = \frac{k}{r}, \text{ на-}$$

пользуется величина  $f_k = \frac{k}{r}$ , на-

зываемая *приведённым коэффициентом трения качения*. При этом сила трения качения  $F_k^{mp}$  по аналогии с силой трения скольжения может быть представлена в

$$\text{виде: } F_k^{mp} = F^n \cdot f_k = F^n \cdot \frac{k}{r} = \frac{M^{mp}}{r}.$$

Мощность, затрачиваемая на трение, равна:

$$P^{mp} = F_k^{mp} \cdot V_{отн.},$$

где  $V_{отн.}$  - скорость качения центра катка.

$$\text{Для подшипников качения: } P^{mp} = M^{mp} \cdot \omega_{отн.} = F^n \cdot f_k \cdot (\omega_1 \pm \omega_2) \cdot \frac{d}{2},$$

где  $d$  - диаметр подшипника по внутреннему кольцу.

Коэффициент  $f_k$  принимается:

$$f_k \approx 0,003 - \text{для шарикоподшипников;}$$

$$f_k \approx 0,005 - \text{для роликоподшипников.}$$

## 9.5. Особенности учёта сил трения при силовом расчёте рычажных механизмов

Для учёта сил трения в кинематических парах рычажных механизмов при определении  $F_{yp}$  или  $M_{yp}$  используется метод приведения сил трения, позволяющий определять уточнённые значения  $F_{yp}^*$  ( $M_{yp}^*$ ) без повторного силового расчёта с учётом трения по формуле:

$$M_{yp}^* = M_{yp} + M_{np}^{mp},$$

где  $M_{yp}$  - уравновешивающий момент, вычисленный без учёта трения;

$M_{np}^{mp}$  - момент трения, приведённый к вращающемуся с угловой скоростью  $\omega_g$  входному звену, и равный:

$$M_{np}^{mp} = \frac{\Sigma P_i^{mp}}{\omega_g}.$$

Здесь  $\Sigma P_i^{mp}$  - суммарная мощность сил трения в кинематических парах.

Для определения реакций в кинематических парах с учётом трения обычно используется метод последовательных приближений, когда по найденным без учёта трения реакциям определяются силы и моменты трения в кинематических парах. Затем эти силы прикладываются как внешние и производится перерасчёт реакций в установленном порядке. Обычно достаточно одного перерасчёта (итерации).

## 9.6. Коэффициент полезного действия (кпд) машины

Энергия, потребляемая машиной, расходуется на преодоление полезных и вредных сопротивлений. Полезные – это сопротивления, для преодоления которых машина предназначена. Вредные – это сопротивления, преодоление которых не даёт производственного эффекта.

Механическим КПД ( $\eta$ ) называется отношение полезной работы  $A_{пл}$  или мощности  $P_{пл}$  к затраченной  $A_{зм}$  ( $P_{зм}$ ). Потери механической энергии в разного рода устройствах состоят главным образом из потерь на трение:

$$\eta = \frac{A_{пл}}{A_{зм}} = \frac{P_{пл}}{P_{зм}} = \frac{A_{зм} - A^{mp}}{A_{зм}} = \frac{P_{зм} - P^{mp}}{P_{зм}} = 1 - \xi_n < 1,$$

где  $\xi_n = \frac{A^{mp}}{A_{зм}} = \frac{P^{mp}}{P_{зм}}$  - коэффициент потерь.

При холостом ходе машины  $\eta = 0$ , но могут быть случаи когда  $\eta < 0$ , что означает невозможность совершать движение из-за явления, называемого *самоторможением*. Например, червячный редуктор не может совершать вращение со стороны червячного колеса.

Рассмотрим машину как совокупность  $n$  элементов, соединённых различным образом между собой.

1. Элементы соединены последовательно и кпд ( $\eta_i$ ) каждого из них известны (рис. 95, а). Тогда

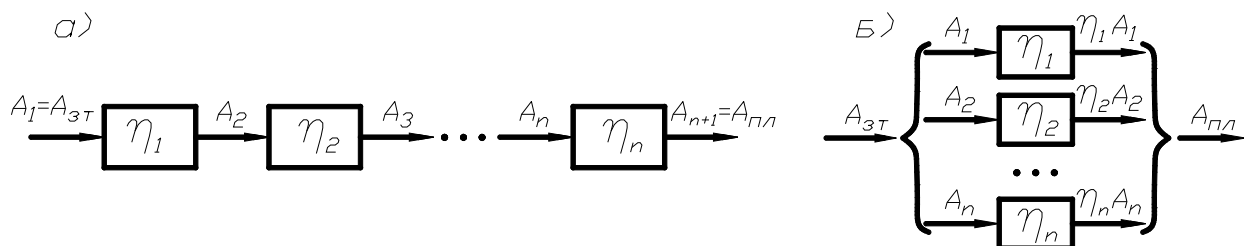


рис. 95

$A_2 = A_1 \cdot \eta_1$ ;  $A_3 = A_2 \cdot \eta_2 = A_1 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2$ ; ...  $A_{n+1} = A_1 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \dots \cdot \eta_n$ ,  
 т.е. общее кпд всей цепи равно:

$$\eta_{\Sigma} = \frac{A_{n+1}}{A_1} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \dots \cdot \eta_n = \prod_{i=1}^n \eta_i$$

Поэтому следует стремиться к созданию простых конструкций с малым числом элементов.

2. Элементы соединены параллельно (рис. 95, б). Тогда

$$\eta_{\Sigma} = \frac{\eta_1 \cdot A_1 + \eta_2 \cdot A_2 + \dots + \eta_n \cdot A_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \eta_i,$$

где  $\alpha_i = \frac{A_i}{A_{\Sigma}}$  - коэффициент распределения энергии.

При  $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_n$  получим  $\eta_i = \eta_{\Sigma}$ , следовательно низкое качество отдельных элементов меньше влияет на общее кпд машины, чем при последовательном соединении.

Сложные механизмы могут образовывать разветвлённую систему, состоящую из последовательного и параллельно соединённых более простых механизмов, где кпд определяется согласно указанным выше правилам.

Так как любой механизм представляет собой кинематическую цепь с последовательно и параллельно соединёнными в кинематических парах звеньями, то общее кпд механизма вычисляется аналогично при известных кпд кинематических пар.

Например, необходимо определить  $\eta_{\Sigma}$  механизма с низшими парами, изображённого на рис. 96.

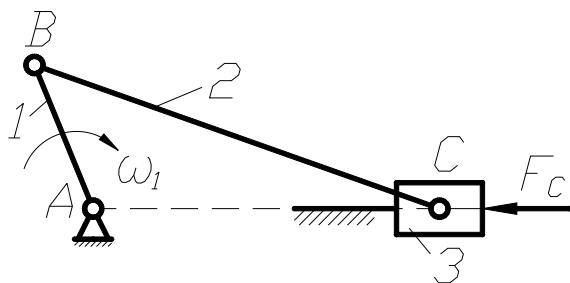


рис. 96

$P_{нл} = F_c \cdot V_c$  - мощность сил полезного сопротивления;

$P_{зт} = P_{нл} + \sum_{i=1}^4 P_i^{mp}$  - затраченная мощность.

$$\sum_{i=1}^4 P_i^{mp} = P_A^{mp} + P_B^{mp} + P_{C_{сп}}^{mp} + P_{C_{носч}}^{mp}.$$

Мощность, затраченная на трение в кинематических парах, равна:

$$P_A^{mp} = F_{0,1} \cdot f_A \cdot \frac{d_A}{2} \cdot \omega_1; \quad P_B^{mp} = F_{1,2} \cdot f_B \cdot \frac{d_B}{2} \cdot (\omega_1 \pm \omega_2);$$

$$P_{C_{сп}}^{mp} = F_{2,3} \cdot f_{C_{сп}} \cdot \frac{d_C}{2} \cdot \omega_2; \quad P_{C_{носч}}^{mp} = F_{3,0} \cdot f_{C_{носч}} \cdot V_C,$$

где  $f$  - коэффициенты трения в парах;  $d$  - диаметры шарниров во вращательных парах. Мгновенный кпд, который является функцией положения звена 1, равен:

$$\eta_{\Sigma} = \frac{P_{нл}}{P_{зт}}.$$

## 10. Уравновешивание масс в механизмах и машинах

### 10.1. Действие сил на фундамент. Условия уравновешивания

В общем случае в кинематических парах механизмов и машин возникают динамические усилия, переменные по величине и направлению. Через стойку они передаются на фундамент, вызывая дополнительные напряжения в отдельных звеньях, вибрацию и ухудшение условий работы. Чтобы этого избежать, необходимо рационально подобрать и расположить массы звеньев с условием полного или частичного гашения динамических усилий. Эта задача решается при уравновешивании.

Основными динамическими составляющими при работе любого механизма являются силы инерции, которые, как правило, переменны по величине и направлению. Это характерно и для случаев, когда входное звено вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_1 = const$  (рис. 96). Все силы и моменты сил инерции можно привести к главному вектору и моменту относительно выбранной точки:

$$\overline{F}_{u\Sigma} = \Sigma \overline{F}_{u_i}; \quad \overline{M}_{u\Sigma} = \Sigma \overline{M}_{u_i} + \Sigma \overline{F}_{u_i} \cdot h_{F_{u_i}}$$

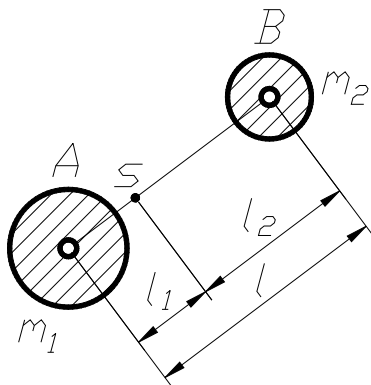
Полностью уравновешенным считается механизм, в котором  $F_{u\Sigma} = 0$  и  $M_{u\Sigma} = 0$ , т.е. сила давления стойки на фундамент остаётся постоянной при движении звеньев.

Из теоретической механики известно, что:  $\overline{F}_{u\Sigma} = -m_\Sigma \cdot \overline{a}_s$ ,  
где  $m_\Sigma$  – масса всех подвижных звеньев;  $a_s$  – ускорение центра масс системы.

Следовательно, для выполнения условия  $F_{u\Sigma} = 0$  необходимо, чтобы  $a_s = 0$ . Это равносильно требованию постоянства положения центра масс механизма относительно стойки. Такое уравновешивание называется *статическим* или *уравновешиванием первого рода*. В этом случае используется метод заменяющих (сосредоточенных) масс, обладающих массой, центром масс и моментом инерции  $J_S$  заменяемого твёрдого тела (звена) с распределённой массой. Если поместить начало системы координат в центр масс системы, то условия эквивалентности заменяемой и заменяющих масс запишутся так:

$$\Sigma m_i = m_\Sigma; \quad \Sigma m_i \cdot x_i = 0; \quad \Sigma m_i \cdot y_i = 0; \quad \Sigma m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2) = J_S,$$

т.е. в общем случае плоского звена необходимы четыре заменяющих массы. В частных случаях число заменяющих масс может быть сведено к двум. Например,



для звена  $AB$  (рис. 97) можно ограничиться частичной заменой его массы  $m$  двумя массами  $m_1$  и  $m_2$ , учитывая условия:

$$m_1 + m_2 = m; \quad m_1 \cdot l_1 - m_2 \cdot l_2 = 0.$$

Отсюда:  $m_1 = m \cdot \frac{l_2}{l}; \quad m_2 = m \cdot \frac{l_1}{l}.$

Для полного уравнивания механизма необходимо выполнение обоих условий:  $F_{u_\Sigma} = 0; \quad M_{u_\Sigma} = 0$ , причём выполнение условия  $M_{u_\Sigma} = 0$  решается при моментном (динамическом) уравнивании, которое называется *уравниванием второго рода*.

рис. 97

называется *уравниванием второго рода*.

## 10.2. Уравнивание с помощью противовесов на звеньях механизма

Рассмотрим последовательность статического уравнивания на примере четырёхшарнирного механизма (рис. 98, а). Заменяем массы звеньев 1, 2, 3 сосредоточенными массами в точках А, В, С, D, причём в силу неподвижности точек А и D, массы, сосредоточенные в этих точках, можно не учитывать.

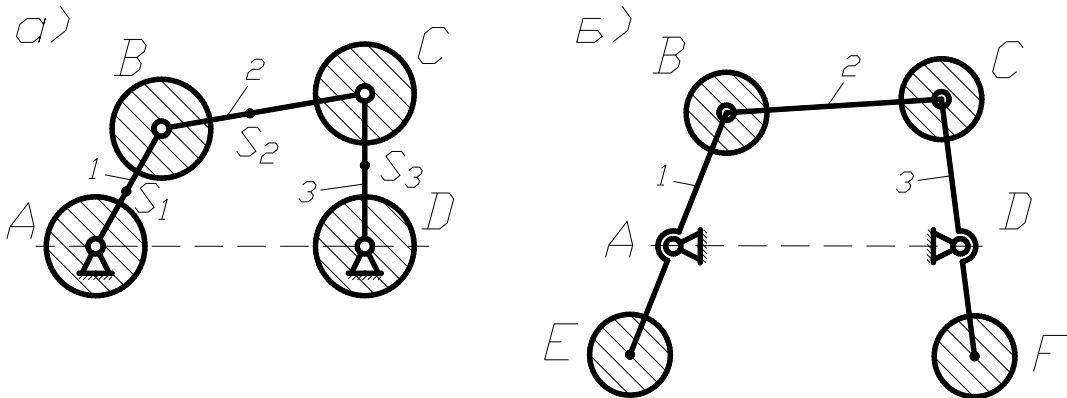


рис. 98

Приведённые массы в точках В и С равны:

$$m_B = m_{B_1} + m_{B_2} = m_1 \cdot \frac{l_{AS_1}}{l_{AB}} + m_2 \cdot \frac{l_{CS_2}}{l_{BC}};$$

$$m_C = m_{C_2} + m_{C_3} = m_2 \cdot \frac{l_{BS_2}}{l_{BC}} + m_3 \cdot \frac{l_{DS_3}}{l_{CD}}.$$

Так как заменяющие массы  $m_B$  и  $m_C$  совершают вращательное движение, то для уравнивания сил инерции необходимы противовесы с массами  $m_E$  и  $m_F$ , определяемыми из условий (рис. 98, б):

$$m_E \cdot l_{AE} = m_B \cdot l_{AB}; \quad m_F \cdot l_{DF} = m_C \cdot l_{CD},$$

где, задавая длины противовесов, можно получить их массы и наоборот.

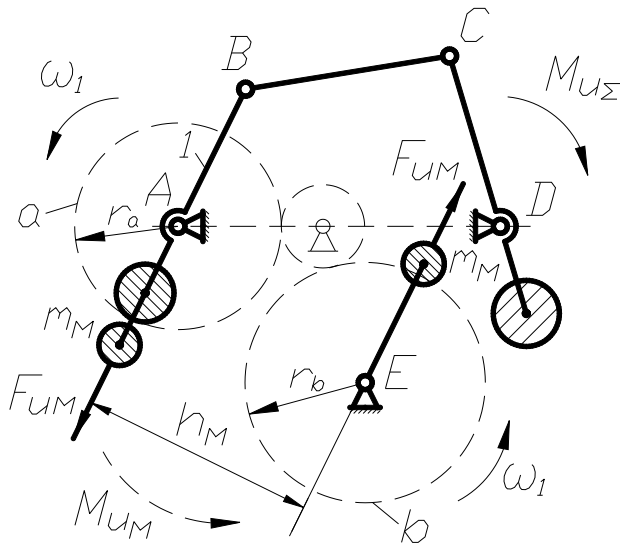


рис. 99

Рассмотрим моментное уравнивание на примере четырёхшарнирного механизма. Его приближённое моментное уравнивание можно осуществить после статического уравнивания, введя в схему механизма два одинаковых дополнительных противовеса  $m_M$  (рис. 99), соединённых с зубчатыми колёсами “а” и “б”. Колесо “а” жёстко связано с кривошипом 1 и вращается с угловой скоростью  $\omega_1$ , а равное ему колесо “б”

вращается с той же угловой скоростью  $\omega_1$ ,

но угловые координаты противовесов отличаются на  $180^0$ , поэтому момент пары сил инерции от противовесов  $m_M$  равен  $M_{u_M} = F_{u_M} \cdot h_M$ . Подбирая положение точки  $E$ , можно обеспечить направление  $M_{u_M}$ , противоположное направлению  $M_{u_\Sigma}$ , а массу противовесов  $m_M$  определяют из условия  $M_{u_\Sigma} = M_{u_M}$ .

### 10.3. Уравнивание вращающихся масс (роторов)

*Ротором* в теории балансировки называется любое вращающееся тело. В связи с появлением быстроходных машин возникла проблема уравнивания быстровращающихся деталей. Так, например, скорость некоторых турбин, валов гироскопов, суперцентрифуг достигает 3÷50 тысяч об/мин и малейшее смещение центра масс с геометрической оси вращения вызывает появление больших сил инерции, т.е. вибрационных явлений в машине и фундаменте.

Различают статическое уравнивание (статическая балансировка) вращающихся роторов и динамическое. Статическая балансировка достигается тем, что центр тяжести вращающейся детали переводят в неподвижную точку. Такое уравнивание применяется для плоских деталей, длина которых мала по сравнению с диаметром. Если такую деталь заменить сосредоточенной массой  $m$ ,



вращающейся относительно неподвижного центра вращения (рис. 100, а), то можно записать уравнение динамики:

$$\bar{G} + \bar{F}_A + \bar{F}_u = 0,$$

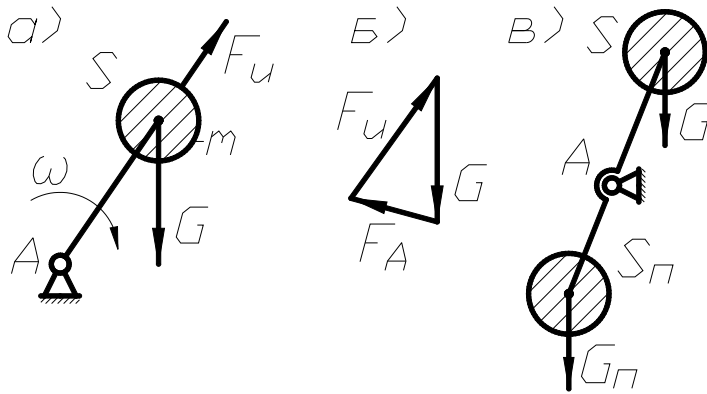


рис. 100

где  $G$  – вес;  $F_A$  – реакция в опоре;  
 $F_u$  – сила инерции, равная:

$$F_u = m \cdot a_S^n = \frac{G}{g} \cdot \omega^2 \cdot \rho = \frac{\omega^2}{g} \cdot d.$$

Здесь  $g$  – ускорение силы тяжести;  
 $d = G \cdot \rho$  – дисбаланс ( $\rho = l_{AS}$ ),  
 который характеризует неуравно-  
 вешенность и направлен так же  
 как сила инерции  $F_u$ .

План сил в данном положении (рис. 100, б) показывает, что  $F_A$  – величина переменная по направлению и создаёт динамические нагрузки и вибрацию. Если  $d = 0$ , то  $\bar{G} + \bar{F}_A = 0$  и динамические нагрузки отсутствуют. Для этого необходимо уравновесить дисбаланс установкой массы противовеса с противоположной стороны (рис. 100, в). Тогда дисбалансы будут уравновешены и  $G_n$  определяется из условия  $d = d_n$ , т.е.  $G \cdot \rho = G_n \cdot \rho_n$ , где  $\rho_n = l_{AS_n}$ .

Рассмотрим уравновешивание неплоской детали, которую можно предста-  
 вить, например, в виде двух грузов  $G_1$  и  $G_2$  (рис. 101, а). В этом случае возникают  
 реакции, вызванные неуравновешенностью как сил, так и моментов от сил инер-  
 ции. Причём момент от сил инерции относительно точки  $A$  равен  $M_{u_2} = F_{u_2} \cdot a$  и  
 характеризуется дисбалансом  $d_2 \cdot a = G_2 \cdot \rho_2 \cdot a$ .

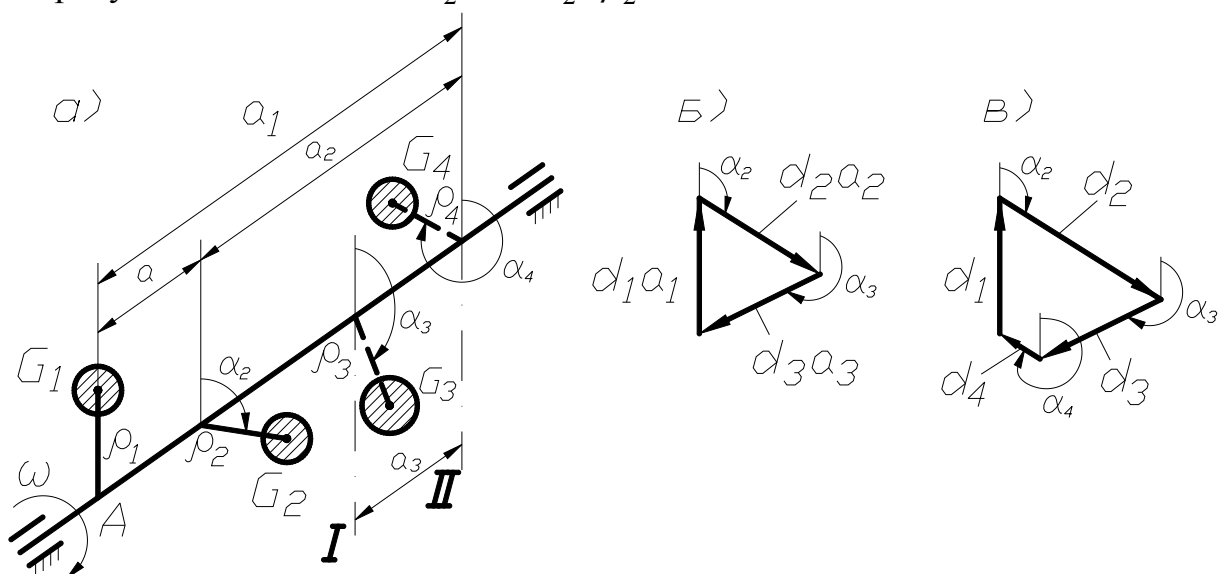


рис. 101

В этом случае динамические нагрузки на опоры возникают даже если проведена статическая балансировка, когда центр тяжести грузов 1 и 2 совпадает с центром вращения. Уравновешивание моментов от сил инерции вращающихся деталей будет обеспечена динамической балансировкой.

Полное уравновешивание системы можно осуществить двумя дополнительными грузами  $G_3$  и  $G_4$ , установленными в разных плоскостях I и II, называемых *плоскостями исправления*. При этом должны выполняться условия:

$$\begin{aligned}\Sigma \bar{F}_{u_i} = 0 & \quad \text{или} \quad \bar{d}_1 + \bar{d}_2 + \bar{d}_3 + \bar{d}_4 = 0; \\ \Sigma \bar{M}_{u_i} = 0 & \quad \text{или} \quad \bar{d}_1 \cdot a_1 + \bar{d}_2 \cdot a_2 + \bar{d}_3 \cdot a_3 + \bar{d}_4 \cdot a_4 = 0.\end{aligned}$$

Совместное решение указанных уравнений, например, графическим путём (рис. 101, б, в) позволяет найти вес и положение противовесов  $G_3$  и  $G_4$ .

Балансировка вращающихся масс осуществляется на специальных балансировочных станках, при этом исключается неуравновешенность, вызванная неточностью изготовления детали.

## Список книг по дисциплине “Теория механизмов и машин”

1. Артоболевский И. И. ТММ./учебник для вузов/.-4-е изд., перераб. и доп.-М.: Наука, 1988.
2. Артоболевский И. И. Сборник задач по ТММ./для машин. Спец.вузов/2-е изд., стереотипное.-М.:Наука, 1975,1973.
3. Баранов Г. Г. Курс ТММ./для авиац. спец. вузов/.Изд. 5-е, стереотип.-М.: Машиностроение, 1975.
4. Безвесельный Е. С. Курсовое проектирование по ТММ в примерах. -Харьков: изд-во Харьк.ун-та, 1960.
5. Безвесельный Е. С. Вопросы и задачи по ТММ:-Киев, 1977.
6. Белоконев И. М. ТММ: Методы автоматизированного проектирования. Уч. пособие для техн.вузов.-Киев:Выща школа, 1990.
7. Ковалев Н. А. ТММ и детали машин. Краткий курс/для немашин. спец. вузов/изд-е 2-е, испр.-М.: Высш.шк., 1973.
8. Кореняко А. С. ТММ. Учебник для втузов. Изд.3-е, перераб.-Киев:Выща Школа, 1976.
9. Курсовое проектирование по ТММ./Уч.пособие для инж.-техн.спец.вузов/ Под редакцией Г. Н. Девойно-Минск: 1986.
10. Курсовое проектирование по ТММ. Уч.пособие для механ. И машиностр. Спец. вузов. Под ред. А. С. Кореняко-М.-Л.:Машин-е, 1964, 1970.
11. Левитская О. Н., Левитский Н. И. Курс ТММ./Уч.пособие для механ.спец. вузов/ 2-е изд., перераб. и доп.-М.:Наука, 1990.
12. Машнев М. М. ТММ и детали машин./Уч.пособие для немашин.спец. вузов/2-е изд., перераб. и доп., Л.: Машин-е,1980.
13. ТММ. Проектирование./Уч.пособие для машин. Спец. вузов/Под общей редакцией О. Н. Кульбачного.-1970.
14. ТММ. Сборник контрольных работ и курсовых проектов. Под общей ред. Н. В. Алехновича. Уч.пособие для студ.-заочников механ.спец.вузов-Минск: Выща шк., 1970.
15. ТММ и механика машин. Учебник для вузов. Под ред. Фролова К. В. 2-е изд., перераб. и доп.-М.: Высшая школа, 1998.
16. ТММ./ Учебник для вузов/Под ред. Фролова К. В.-1987.
17. Юдин В. А., Петрокас Л. В. ТММ: Учебник,2-е изд.,перераб. и доп.-М.: Высшая школа, 1977.